Math. P.
201.h
Hamilton
/f

<36602038200015

<36602038200015

Bayer. Staatsbibliothek

H. P. Hamilton's
System der Kegelschnitte

analytisch dargestellt.

Aus dem Englischen übersetzt

von

J. H. Benckendorff,
Professor und Oberlehrer am Friedrichs-Werderschen Gymnasio
zu Berlin.

Staatsbibliothek München

Mit vier Figurentafeln.

Berlin, 1828,
bei Ludwig Oehmigke.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort des Übersetzers.

Das Werk, von dem Vorliegendes eine Übersetzung ist, hat den Titel

„An analytical System of conic Sections, designed for the use of students in the university; by the Rev. H. P. Hamilton, M. A. F. R. S. Lond. and Edin. Fellow of Trinity College. Cambridge 1828."

Das Werk hat mehrere gute Eigenschaften, die es dem Anfänger im Studio der analytischen Geometrie empfehlenswerth machen, seine Kürze und Reichhaltigkeit. Indem der Verfasser sich nämlich von allen weitläuftigen Erörterungen fern hält, in die oft selbst bessere Schriftsteller über diesen Gegenstand gerathen, hat er Raum gewonnen für eine Menge von Sätzen und Aufgaben, die man in größern Werken vermißt. Dabei folgt der Verfasser einer strengen Ordnung, hat die Sätze gehörig classificirt, und hat dadurch seinem Werke die dem Anfänger so nothwendige Übersichtlichkeit gegeben.

Wollte man es ihm zum Vorwurfe machen, daß er bei den einzelnen Kurven dieselben Sätze wiederholt, und diese nicht lieber unter allgemeinere Gesichtspunkte gebracht hat, so erinnere man sich, daß er für Anfänger schreibt, die so das Einzelne leicht auffassen und sich nachher mit größerem Nutzen die allgemeinere Ansicht aneignen werden.

Da es der gegenwärtige Stand mathematischer Kenntnisse erfordert, den zur Universität abgehenden Jünglingen wenigstens eine Vorbereitung für die analytische Behandlung der Geometrie mit zu geben, so hält der Übersetzer dies Werk, obgleich dem Titel nach für Universitäts-Vorlesungen bestimmt, dennoch für diesen Zweck geeignet; denn die Haupt-Abschnitte desselben werden sich ohne Schwierigkeit in der ersten Klasse der Gymnasien erklären lassen. Zwar ist der Übersetzer nicht unbekannt mit den verdienstlichen Bemühungen deutscher Gelehrter in diesem Zweige der Mathematik: dem ungeachtet aber glaubt er, daß dies Buch, auf deutschen Boden verpflanzt, Nutzen stiften wird. Wenigstens ist dies die redliche Absicht, die ihn zu dieser Arbeit veranlaßte, ohne alle thörichte Eitelkeit, die an sich reiche mathematische Literatur der Deutschen durch eine Übersetzung vermehren zu wollen.

Berlin, im Oktober 1828.

Vorrede des Verfassers.

Der Hauptzweck der vorliegenden Blätter ist das Studium der Kegelschnitte nach Grundsätzen, die dem gegenwärtigen Stande mathematischer Kenntnisse angemessen sind, zu erleichtern. In einem früheren Werke hat der Verfasser schon eine leichte Skizze desselben Gegenstandes, in Verbindung mit analytischer Geometrie, gegeben. Aber nachherige Erfahrung hat ihn belehrt, daß diese Methode, die Kegelschnitte zu behandeln, obgleich durch sehr ausgezeichnete Schriftsteller des Festlandes sanctionirt, zu wissenschaftlich, wenn er so sagen darf, für den Elementar-Unterricht ist. Sie ist mangelhaft in der wesentlichen Eigenschaft der Einfachheit, und setzt eine größere Gewandtheit in algebraischen Operationen voraus, als junge Leute zu der Zeit, wo sie diesen Zweig des Studiums beginnen, gewöhnlich erreicht haben.

Der Verfasser hat in diesem, jetzt dem Publikum dargebotenen, Werke diesem Einwurfe zu begegnen gesucht. Er geht von der Erklärung aus: Ein Kegelschnitt sei der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem festen

Punkte und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie zu einander in einem constanten Verhältnisse sind. Aus dieser Erklärung, die er Boscovich verdankt, leitet er die Fundamental-Gleichungen der drei Kurven ab, die unter der gemeinschaftlichen Benennung der Kegelschnitte zusammen gefaßt werden. Die Form und Eigenschaften derselben werden zunächst durch Hülfe dieser Gleichungen aufgesucht, indem jede Kurve, der leichteren Übersicht wegen, in drei Kapiteln abgehandelt wird, je nachdem man sie auf rechtwinklichte, schiefwinklichte und Polar-Coordinaten bezieht.

Wegen der Verwandtschaft, welche zwischen zweien dieser Kurven, der Ellipse und Hyperbel Statt findet, können in den meisten Fällen die Eigenschaften der einen aus den correspondirenden der andern abgeleitet werden, indem man nur das Vorzeichen eines Buchstaben der Gleichung ändert. Da man aber einige Schwierigkeit finden mögte, die Gestalt der Hyperbel aus der analogen der Ellipse aufzufinden, so wurde es nicht für ganz überflüssig gehalten, die Eigenschaften beider Kurven abgesondert zu erforschen.

Der Verfasser ist veranlaßt gewesen, eine kurze Einleitung, enthaltend die Gleichung der geraden Linie und des Kreises voran zu schicken zum Besten derjenigen, die noch mit diesem Gegenstande der Analysis unbekannt sind.

Trinity College, Januar 1828.

Inhalt.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Von der Lage eines Punktes.

Methode, die Lage eines Punktes zu bestimmen, §§.
(1) in einer geraden Linie . . . . 1.
(2) in einer Ebene . . . . 2.
Erklärung der Ausdrücke, Gleichung einer Linie und Ort . . . . 4.
Erklärung des Ausdruckes, Polar-Gleichung . . . 5.

Zweites Kapitel.

Von der geraden Linie.

Form ihrer Gleichung, wenn die Axen
(1) rechtwinklicht . . . . 6.
(2) schiefwinklicht sind . . . . 7.
Methode, den Ort einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades zu construiren . . . . 10.
Gleichung einer geraden Linie, welche geht
(1) durch einen gegebenen Punkt . . . . 12.
(2) durch zwei gegebene Punkte . . . . 14.
Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt gezogen ist und
(1) parallel zu einer gegebenen Linie . . . . 17.

§§.

(2) senkrecht auf einer gegebenen Linie ist . . . . . . 19.
und (3) mit einer gegebenen Linie einen bekannten Winkel bildet . . . . 23.
Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte durch ihre Coordinaten . . . . 26.
Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Linien . . 28.
Ausdruck für die Senkrechte von einem gegebenen Punkte auf eine gerade Linie . . . . 30.

Drittes Kapitel.

Vom Kreise.

Seine Gleichung, wenn der Anfang der Coordinaten ist,
(1) der Mittelpunkt des Kreises,
(2) der Endpunkt eines Diameters,
(3) irgend ein Punkt in der Axe der x und y,
(4) irgend ein Punkt in oder ausserhalb des Kreises 33. u. 34.
Methode, den Ort der Gleichung $y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0$ zu construiren . 36.
Den Durchschnitt einer geraden Linie mit dem Kreise zu finden . . . . 37.
Gleichungen der Tangente und Normale . . . . . . 38.
Methode, eine Tangente von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Punkte an denselben zu ziehn . . . . . 40.

Von den Kegelschnitten.

Allgemeine Erklärung . . . . 44.
Eintheilung der Kegelschnitte in drei Arten . . . . . 45.

Von der Parabel.

Erstes Kapitel.

Von der Parabel, auf ihre Axe bezogen.

Gleichung der Parabel . . . . 46.
Gestalt der Parabel aus der Gleichung abgeleitet . . . 47.

§§.

Durchschnitt einer geraden Linie mit der Parabel . . . 51.

Gleichungen der Tangente und Normale . . . . 52. u. 57.

Methode, an die Parabel eine Tangente zu ziehen von einem Punkte ausserhalb derselben . . . . 59.

Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet 60.

Zweites Kapitel.

Von der Parabel, auf den Focus bezogen.

Ausdruck für die Entfernung irgend eines Punktes derselben vom Focus . . . . 63.

Polar-Gleichung der Parabel . . . . 64.

Die Tangente bildet gleiche Winkel mit dem Focal-Abstande und der der Axe parallelen Linie . . . . . 68.

Die Tangente und eine Senkrechte vom Focus auf dieselbe treffen die Axe der y in demselben Punkte . . . 69.

Zwei Linien vom Focus, eine nach dem Berührungspunkte und die andere nach dem Durchschnitt der Tangente mit der Directrix, sind senkrecht auf einander . . . 70.

Drittes Kapitel.

Von der Parabel, auf irgend einen Diameter bezogen.

Den Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ist eine gerade Linie und heißt ein Durchmesser 71.

Die Subtangente wird durch die Kurve halbirt, die Axen mögen rechtwinklicht oder schief sein . . . . . . 80.

Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen Linie Tangenten-Paare an die Parabel gezogen werden, so gehen die Linien, welche die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt . . . . 82.

Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien sich inner- oder ausserhalb der Parabel schneiden, so sind die Rechtecke aus den Abschnitten derselben in einem constanten Verhältnisse . . . . 84.

Viertes Kapitel.

Vermischte Sätze.

Von der Ellipse.

Erstes Kapitel.

Von der Ellipse, auf ihre Axen bezogen.

§§.

Gleichung der Ellipse, wenn der Anfangspunkt liegt
(1) im Scheitel der großen Axe . . . . 89.
(2) im Mittelpunkte . . . . 92.
Gestalt der Ellipse, abgeleitet aus der Gleichung . . . 96.
In welchem Falle die Ellipse zur Parabel wird . . . . 100.
Durchschnitt einer geraden Linie mit der Ellipse . . . 101.
Gleichung der Tangente . . . . 102., u. 103.
Durchschnitt der Tangente mit den Axen . . . . . . 104.
Gleichung der Normale . . . . 107.
Methode, eine Tangente an die Ellipse von einem Punkte ausserhalb derselben zu ziehn . . . . 109.
Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet 110.

Zweites Kapitel.

Von der Ellipse, auf den Focus bezogen.

Ausdruck für die Entfernung irgend eines Punktes derselben vom Focus . . . . 112.
Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten zusammen genommen = 2a sind . . . . 114.
Polar-Gleichung der Ellipse
(1) wenn ein Focus der Pol . . . . 115.
(2) wenn der Mittelpunkt der Pol ist . . . . 119.
Die Focal-Abstände bilden gleiche Winkel mit der Tangente 120.
Ort der Punkte, in welchen eine Senkrechte aus dem Focus die Tangente schneidet . . . . 121.
Das Rechteck aus den Senkrechten von einem und dem andern Focus auf die Tangente ist gleich dem Quadrate der halben kleinen Axe . . . . 122.

Drittes Kapitel.

Von der Ellipse, auf irgend ein System conjugirter Diameter bezogen.

Erster Abschnitt. Von conjugirten Diametern im Allgemeinen.

§§.

Der Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ist eine gerade Linie und heißt Diameter 123.

Gleichung für die Ordinaten irgend eines Diameters . 125.

Conjugirte Diameter . . . . 127.

Gleichung für ein System conjugirter Diameter . . . 129.

Die Axen sind die einzigen conjugirten Diameter, welche senkrecht auf einander sein können . . . . 131.

Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein System conjugirter Diameter . . . . 132.

Durchschnitt der Tangente mit irgend zwei conjugirten Diametern . . . . 137.

Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen Linie Tangenten-Paare an die Ellipse gezogen werden, so werden die Linien, welche die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn . . . . 138.

Wenn zwei der Lage nach gegebene gerade Linien sich inner- oder ausserhalb der Ellipse schneiden, so sind die Rechtecke aus den Abschnitten derselben in einem constanten Verhältnisse . . . . 141.

Zweiter Abschnitt. Von den Eigenschaften conjugirter Diameter.

Die Summen der Quadrate irgend zweier conjugirter Diameter ist gleich der Summe der Quadrate der Axen . . . . 143.

Der Inhalt umschriebener Parallelogramme, deren Seiten parallel zu einem Systeme conjugirter Diameter sind, ist constant . . . . 144.

Gleiche conjugirte Durchmesser . . . . 147.

Von allen Systemen conjugirter Durchmesser sind die senkrechten die kleinsten, und die gleichen die größesten 149.

Das Rechteck aus den Focalabständen ist gleich dem Quadrate des zugehörigen halben conjugirten Diameters 150.

§§.

Wenn eine Tangente an P der CA, CB in T und t begegnet, so ist PT · Pt = CD² . . . . 151.

Wenn eine Tangente an P, Tangenten an A, a in T, t begegnet, so ist AT · at = BC² . . . . 153.

Dritter Abschnitt. Von Supplementar-Sehnen.

Gleichungen für irgend zwei Supplementar-Sehnen . . 155.

Zwei Diameter parallel zu irgend zwei Supplementar-Sehnen sind conjugirte . . . . 157.

Hiernach kann man ziehn

(1) einen Diameter, der conjugirt zu einem gegebenen ist 158.

(2) eine Tangente an einen gegebenen Punkt . . . . 159.

Ausdruck für die Tangente des Winkels, den zwei Haupt-Supplementar-Sehnen bilden . . . . 160.

Analytische und geometrische Methode, zwei conjugirte Diameter zu ziehn, die einen gegebenen Winkel bilden sollen . . . . 164.

Viertes Kapitel.

Vermischte Sätze.

Methode, den Mittelpunkt und die Axen einer Ellipse zu finden . . . . 165.

Ellipsen-Zirkel . . . . 168.

Aufgaben . . . . 169.—171.

Von der Hyperbel.

Erstes Kapitel.

Von der Hyperbel, auf ihre Axen bezogen.

Gleichung der Hyperbel, wenn der Anfangspunkt liegt

(1) im Scheitel der Queraxe . . . . 174.

(2) im Mittelpunkte . . . . 175.

Gleichseitige oder rechtwinklichte Hyperbel . . . . . . 178.

§§.

Gleichung der Hyperbel, abgeleitet aus der der Ellipse, indem man b in $b\sqrt{-1}$ verwandelt . . . . 179.
Gestalt der Hyperbel, aus der Gleichung abgeleitet . . 180.
Conjugirte Hyperbel . . . . 183.
In welchem Falle die Hyperbel eine Parabel wird . . . 184.
Durchschnitt einer geraden Linie mit der Hyperbel . . . 185.
Gleichung der Tangente . . . . 186., 187.
Durchschnitt der Tangente mit den Axen . . . . 188.
Gleichung der Normale . . . . 190.
Methode, eine Tangente an die Hyperbel zu ziehn von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkte . . . 192.
Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet . . . . 193.

Zweites Kapitel.

Von der Hyperbel, auf den Focus bezogen.

Ausdruck für den Abstand irgend eines Punktes derselben vom Focus . . . . 195.
Ort eines Punktes, dessen Unterschied der Entfernungen vom Focus = 2a . . . . 197.
Polar-Gleichung der Hyperbel
(1) wenn ein Focus der Pol ist . . . . 198.
(2) wenn der Mittelpunkt der Pol ist . . . . 202.
Die Focal-Abstände machen gleiche Winkel mit der Tangente . . . . 203.
Ort der Punkte, in welchem eine Senkrechte vom Focus die Tangente schneidet . . . . 204.
Das Rechteck aus den Senkrechten von einem und dem andern Focus auf die Tangente ist gleich dem Quadrate der halben conjugirten Axe . . . . 205.

Drittes Kapitel.

Von der Hyperbel auf irgend ein System conjugirter Diameter bezogen.

§§.

Erster Abschnitt. Von conjugirten Diametern im Allgemeinen.

Der Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ist eine gerade Linie, genannt Diameter . . 206.
Durchschnitt eines beliebigen Diameters mit der Kurve . 207.
Solche Diameter, welche die Kurve in einer unendlichen Entfernung treffen, heißen Asymptoten . . . . . 209.
Gleichung für die Ordinaten irgend eines Diameters . . 210.
Conjugirte Diameter . . . . 212.
Gleichung für ein System conjugirter Diameter . . . . 214.
Die Axen sind die einzigen conjugirten Diameter, welche senkrecht zu einander sein können . . . . 215.
Gleichung der Hyperbel, bezogen auf irgend ein System conjugirter Diameter . . . . 218.
Durchschnitt der Tangente mit irgend zwei conjugirten Diametern . . . . 223.
Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen Linie Tangentenpaare an die Hyperbel gezogen werden, so gehen die Linien, welche die zusammen gehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt . . . . 224.
Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien sich inner- oder ausserhalb der Hyperbel schneiden, so sind die Rechtecke aus ihren Abschnitten in einem constanten Verhältniß 227.

Zweiter Abschnitt. Von den Eigenschaften conjugirter Diameter.

Der Unterschied der Quadrate irgend zweier conjugirter Diameter ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der Axen . . . . 229.
Der Inhalt aller Parallelogramme, deren Seiten zu zwei conjugirten Diametern parallel sind, ist constant . . 230.
Die Hyperbel kann nicht gleiche conjugirte Diameter haben 233.
Das Rechteck aus den Focal-Abständen ist gleich dem Quadrate des zugehörigen halben conjugirten Diameters 234.
Wenn eine Tangente an P, CA und CB in T und t trifft, so ist $PT \cdot Pt = CB^2$ . . . . 255.

§§.

Dritter Abschnitt. Von Supplementar-Sehnen.

Gleichungen für zwei Supplementar-Sehnen . . . . 236.

Zwei Diameter, parallel zu zwei Supplementar-Sehnen sind conjugirte . . . . 239.

Hiernach kann man ziehn

(1) einen Diameter, der zu einem gegebenen conjugirt ist 240.

(2) eine Tangente an einen gegebenen Punkt . . . . 241.

Ausdruck für die Tangente des Winkels, welchen die Haupt-Supplementar-Sehnen bilden . . . . 242.

Geometrische Methode, zwei Diameter, die conjugirte sein sollen, zu ziehn. . . . . 245.

Viertes Kapitel.
Von Asymptoten.

Gleichung für die Asymptoten, wenn die Hyperbel auf beliebige conjugirte Diameter bezogen ist . . . . . 246.

Gleichung der Asymptoten abgeleitet

(1) aus der Gleichung der Kurve . . . . 249.

(2) aus der Gleichung der Tangente . . . . 250.

Wenn irgend eine Sehne verlängert wird, bis sie den Asymptoten begegnet, so sind die Theile zwischen der Kurve und den Asymptoten gleich . . . . 251.

Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten . . 253.

Aus der Axen-Gleichung der Hyperbel die Asymptoten-Gleichung derselben abzuleiten . . . . 254.

Gleichung der Tangente auf die Asymptoten bezogen . . 255.

Durchschnitt der Tangente mit den Asymptoten . . . . 257.

Die Axen der Hyperbel zu finden, wenn ein Punkt in der Kurve und die Lage der Asymptoten gegeben sind . 259.

Von den Kegelschnitten im Allgemeinen.
Erstes Kapitel.
Von der allgemeinen Gleichung der drei Kurven.

Gleichung für einen Kegelschnitt im Allgemeinen. . 260., 261.

Polar-Gleichung für einen Kegelschnitt . . . . . . 162.

Zweites Kapitel.

§§.

Über die Schnitte des Kegels.

Erklärung des geraden und schiefen Kegels . . . . . . 265.

Gleichung für den Schnitt eines geraden Kegels durch eine Ebene . . . . 266.

Der Schnitt ist eine Parabel, Ellipse, Hyperbel . 267.—272.

Gleichung für den Schnitt eines schiefen Kegels durch eine Ebene . . . . 274.

Der antiparallele Schnitt eines schiefen Kegels. . . . . 275.

Verbesserungen.

Seite	8	Zeile	12	v. u.	Statt	scheidet	lies	schneidet.
=	13	=	11	v. o.	=	OR	=	QR.
=	16	=	8	v. u.	=	b	=	b'
=	18	=	9	v. o.	=	$-a^2x$	=	$-a^2x'$
=	20	=	10	v. u.	=	$(NP-CD^2$	=	$(NP-CD)^2$
=	74	=	7	v. u.	=	$-\frac{a^2x'}{a^2y'}$	=	$-\frac{b^2x'}{a^2y'}$
=	88	=	6	v. o.	=	$b'^2(\delta-a'^2)$	=	$b'^2(\delta^2-a'^2)$ (i. Zhlr.)
=	99	=	9	v. o.	=	a'	=	α'
=	102	=	4	v. o.	=	$\tang \gamma^3$	=	$\tang^2\gamma$
=	111	=	6	v. u.	=	BSb	=	B, b
=	117	=	13	v. o.	=	$-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2$	=	$-b^2\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2$;
=	132	=	7	v. o.	=	$\frac{-a^2\alpha\beta}{a\alpha^2-b^2}$	=	$\frac{-a^2\alpha^2\beta}{a^2\alpha^2-b^2}$
=	138	=	11	v. u.	=	$x'\sin\varphi$	=	$x'\sin\vartheta$.
=	160	=	4	v. u.	=	a^2y^2	=	b^2x^2
=	160	=	4	v. u.	=	$(x'+y')a^2\sin^2\vartheta$	=	$(x'+y')^2b^2\sin^2\vartheta$.

System der Kegelschnitte

analytisch dargestellt.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Von der Lage eines Punktes.

§. 1. **Die Lage eines Punktes, der in einer geraden Linie liegt, ist bestimmt, wenn man ihn auf irgend einen andern Punkt, der beliebig in derselben Linie angenommen ist, bezieht.**

(Fig. 1.) Es sei XX′ eine gerade Linie von unbestimmter Länge, P irgend ein Punkt in ihr, A irgend ein anderer in XX′ beliebig genommener Punkt; so ist die Lage des Punktes P bestimmt, in dem man ihn auf A bezieht.

Wenn die veränderliche Entfernung AP durch x bezeichnet wird, so entfernt sich der Punkt P weiter von A nach X hin, wenn x zunimmt; er nähert sich von X nach A, wenn x abnimmt; er fällt mit A zusammen,

wenn x=o wird, und entfernt sich wieder von A, in entgegengesetzter Richtung, gegen X′ hin, wenn x negativ wird.

Daher wenn x positiv angenommen wird, indem P auf der rechten Seite des Punktes A liegt, muß es als negativ angesehn werden, wenn P an der linken Seite von A liegt.

Eben so, wenn die Linie YAY′ senkrecht, oder unter einem gegebenen Winkel gegen XX′ geneigt ist, so kann auf gleiche Weise gezeigt werden, daß wenn x positiv angenommen wird, wenn P in AY oberhalb XX′ liegt, es als negativ angesehn werden muß, wenn P in AY′ unterhalb XX′ liegt.

Diese conventionelle Regel, nach welcher Unterschied der Zeichen, Entgegengesetztheit der Richtung anzeigen soll, ist in allen Fällen anwendbar, wo der Abstand von einem festen Punkte, längs einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, zu beurtheilen ist.

§. 2. Die Lage eines Punktes, der in einer Ebene liegt, ist bestimmt, indem man ihn auf zwei gerade Linien bezieht, die sich in derselben Ebene unter einem gegebenen Winkel schneiden.

(Fig. 2.) Es sei P ein Punkt in einer Ebene, XX′ und YY′ seien zwei gerade Linien von unbestimmter Länge, die sich einander schneiden unter dem bekannten Winkel A. Von P ziehe PM, PN parallel zu AY und AX. Dann ist die Lage des Punktes P, durch Hülfe der Linien PM, PN, die seine Entfernung von AX, AY messen, bestimmt.

Die Linien AM, MP heißen Coordinaten des Punktes P, und A heißt der Anfangspunkt; AX, AY aber die Axen der Coordinaten.

Sind die Coordinaten unbekannt, so wird AM mit x, und PM mit y bezeichnet; wenn sie als bekannt angenommen werden, so ist es gewöhnlich, sie mit accentuirten Buchstaben x', y', oder x'', y'' zu bezeichnen.

Von den beiden Coordinaten AM, MP heißt die erstere, der Unterscheidung wegen, die Abscisse, die letztern die Ordinate. Die Linie AX, auf welcher man die Abscissen mißt, heißt die Axe der x, und die Linie AY, in deren Richtung man die Ordinaten nimmt, die Axe der y.

Die Axen AX, AY werden im Allgemeinen unter rechten Winkeln gezogen, und heißen dann rechtwinkliche Axen; in allen andern Fällen heißen sie schiefwinkliche Axen.

§. 3. Wenn die Coordinaten eines Punktes gegeben sind, so werden die Zeichen, mit denen sie behaftet sind, dienen, um zu bestimmen, in welchem von den vier Winkeln, die von den Axen um den Anfangspunkt A gebildet werden, dieser Punkt liegt.

Es seien x', y' die Coordinaten des Punktes P, Fig. 2.; dann ist

1) wenn P irgendwo innerhalb des Winkels YAX liegt, x' und y', beides positiv.

Liegt er in der Axe AX, so ist x' positiv, und $y' = o$, liegt er dagegen in der Axe AY, so ist $x' = o$, und y ist positiv.

2) Liegt P irgendwo innerhalb des Winkels YAX', so ist x' negativ, und y' positiv, und wenn er in der Axe AX' liegt, ist x' negativ, und $y' = o$.

3) Liegt P irgendwo innerhalb des Winkels Y'AX', so sind x' und y' beide negativ, und liegt er in der Axe AY' so ist $x = o$, und y' ist negativ.

4) Liegt P irgendwo innerhalb des Winkels Y'AX, so ist x' positiv, und y' negativ.

§. 4. Wenn eine Linie, gerade oder krumm, in einer Ebene gezogen ist, und aus der Definition, oder sonst einer bekannten Eigenschaft dieser Linie, ein Verhältniß der Coordinaten irgend eines ihrer Punkte abgeleitet werden kann, so heißt die unbestimmte Gleichung, welche dieses Verhältniß ausdrückt, angenommen, es bleibe für jeden Punkt dasselbe, die Gleichung dieser Linie.

Umgekehrt, wenn eine unbestimmte Gleichung zwischen zwei Veränderlichen gegeben ist, kann eine Reihe von Punkten gefunden werden, welche den verschiedenen Auflösungen dieser Gleichung entsprechen: die Reihe dieser so bestimmten Punkte heißt der Ort (locus) der gegebenen Gleichung.

Der Sinn dieser beiden Sätze wird vollkommen erläutert werden, wenn wir von der geraden Linie und dem Kreise handeln werden.

§. 5. Die Lage eines Punktes in einer Ebene kann nicht allein durch Hülfe seiner Coordinaten bestimmt werden, sondern auch durch Hülfe seiner Entfernung von einem festen Punkte, und des Winkels, welchen diese Entfernung mit einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie macht. (Siehe Fig. 2.)

Es sei also P irgend ein Punkt in einer Ebene, A ein fester Punkt, AX eine gerade, der Lage nach gegebene Linie. Man stelle sich die Punkte A und P ver-

bunden vor. Dann ist offenbar die Lage P gegeben, wenn die Entfernung AP und der Winkel PAX, welchen jene mit AT macht, bekannt sind.

Der feste Punkt A heißt der Pol, und die veränderliche Entfernung AP der Radius vector; AP wird gewöhnlich mit r bezeichnet, und der Winkel PAX durch ω. Die Größen r und ω heißen die Polar-Coordinaten, und die Gleichung, welche das Verhältniß zwischen ihnen und irgend einem Punkte einer Kurve ausdrückt, heißt die Polar-Gleichung der Kurve.

Zweites Kapitel.

Von der geraden Linie.

§. 6. Die Gleichung der geraden Linie zu finden.

(Fig. 3.) Es sei BZ eine gerade Linie von unbestimmter Länge, deren Gleichung gefunden werden soll.

Da die Lage der Axen willkürlich ist, so wollen wir annehmen,

1) daß ihr Anfangspunkt A ein Punkt in der gegebenen Linie sei. Durch A ziehe AX, so daß sie mit BZ einen bekannten Winkel mache, ferner bilde AY mit AX einen rechten Winkel: nimm irgend einen beliebigen Punkt P in BZ, und ziehe auf AX die senkrechte PM.

Es sei $AM = x, \quad MP = y;$

folglich $\frac{PM}{MA} = \text{tang } ZAX;$

d. h. $\frac{y}{x} = \text{tang } ZAX;$

Da aber der Winkel ZAX als bekannt angenommen worden, so können wir seine Tangente mit a bezeichnen;

daher $\frac{y}{x}=a.$

Da dasselbe Verhältniß als bestehend zwischen den Coordinaten eines jeden andern Punktes der Linie nachgewiesen werden kann, so ist die verlangte Gleichung

$$y=ax.$$

Angenommen

2) Der Anfangspunkt der Axen sei außerhalb der gegebenen Linie, z. B. in A.

(Fig. 4.) Es treffe BZ die Linie AX in C, und AY in B: durch B ziehe BN parallel mit AX, so daß es PM die Ordinate von P in N treffe.

Wie vorher sei AM=x, MP=y; auch sei AB=b.

Dann ist $\frac{PN}{NB}=\tan PBN$

$=\tan ZGX;$

d. h. $PN=NB\cdot\tan ZCX.$

Aber $PN=PM-MN$

$=y-b;$

folglich $y-b=ax$

oder $y=ax+b,$

welches also, wie im vorigen Falle, die gesuchte Gleichung ist.

Daher ist klar, daß die Gleichung einer geraden Linie ist

entweder $y=ax$

oder $y=ax+b,$

je nachdem sie durch den Anfangspunkt geht oder nicht.

§. 7. Zusatz. Wenn die Axen unter irgend einem Winkel gegen einander geneigt sind, so ist

$$\frac{PM}{MA}=\frac{\sin PAM}{\sin APM}=\frac{\sin ZAX}{\sin ZAY};$$

setze dies $=a$, so ist die Gleichung für BZ von derselben Form, wie vorher,

$$y=ax+b,$$

in welcher der Coefficient a nun das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die Linie BZ mit den Axen der x und y macht, ausdrückt.

§. 8. Bei Anwendung der Gleichung einer geraden Linie nimmt man allemal an, die Linie sei von unbestimmter Länge. Wenn wir Gelegenheit haben, zwei gerade Linien zu betrachten, so ist es, anstatt sie durch die Gleichungen

$$y=ax+b$$
$$Y=a'X+b'$$

zu bezeichnen, worin zwei Arten von Buchstaben x, y und X, Y angewandt werden, um die veränderlichen Coordinaten zu bezeichnen, gewöhnlich sie durch die Gleichungen

$$y=ax+b,$$
$$y=a'x+b'$$

zu bezeichnen, in welchen dieselben Buchstaben x, y für die Coordinaten in beiden Gleichungen gebraucht werden. Aber man muß sich immer erinnern, daß x und y in diesen beiden Gleichungen nicht denselben Werth haben, außer in dem besondern Falle, wo die Linien sich schneiden; denn alsdann, wie klar ist, werden die Coordinaten für den Durchschnittspunkt in beiden Linien dieselben sein.

§. 9. Umgekehrt, der Ort der unbestimmten Gleichung des ersten Grades

$$Ay+Bx+C=o$$

ist eine gerade Linie.

Denn indem durch A dividirt und die Gleichung in Hinsicht auf y aufgelöst wird, hat man

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A},$$

und indem man $-\frac{B}{A}$ mit a, und $-\frac{C}{A}$ mit b bezeichnet,

$$y=ax+b,$$

welches mit der Gleichung der geraden Linie, die eben entwickelt ist, übereinstimmt.

§. 10. Wenn es erforderlich ist, den Ort einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades zu construiren, so ist es hinreichend, zwei ihrer Punkte zu finden, weil nur zwei Punkte nöthig sind, die Lage einer geraden Linie zu bestimmen. Die zwei Punkte, welche am leichtesten zu finden sind, sind diejenigen, in welchen die zu suchende Linie die Axen von x und y scheidet, und welche bestimmt sind, indem man in der gegebenen Gleichung nach einander x und y = o macht; im ersten Falle stellt der sich ergebende Werth von y die Entfernung des Anfangspunktes von dem Durchschnittspunkte mit AY dar; im zweiten Falle stellt der sich ergebende Werth von x die Entfernung des Anfangspunktes von dem Durchschnittspunkte mit AX dar. Die unendliche gerade Linie, die diese Durchschnittspunkte verbindet, ist die gesuchte Linie.

§. 11. Zur Erläuterung dieses Verfahrens möge es nun erforderlich sein, die Lage einer geraden

Linie anzugeben, welche der Ort irgend einer Gleichung des ersten Grades ist.

Die gegebene Gleichung kann unter folgenden vier Formen vorkommen:

1) $y = ax + b$,
2) $y = -ax + b$,
3) $y = ax - b$,
4) $y = -ax - b$.

1) Die gerade Linie, welche der Ort der ersten dieser Gleichungen ist, ist BZ (Fig. 4.).

2) Den Ort von $y = -ax + b$ zu finden (Fig. 5.).

Mache $x = o$, folglich $y = b$. In AY nimm $AB = b$, welches der Werth von y für $x = o$ ist.

Mache $y = o$; folglich $x = \frac{b}{a}$. In AX nimm $AC = \frac{b}{a}$, welches der Werth von x für $y = o$ ist.

Verbinde B und C, und die unendliche Linie BZ ist der gesuchte Ort.

3) Den Ort von $y = ax - b$ zu findeu. (Fig. 6.)

Mache $x = o$; folglich $y = -b$. In der verlängerten YA nimm $AB = b$.

Mache $y = o$; folglich $x = \frac{b}{a}$. In AX nimm AC $= \frac{b}{a}$; verbinde B und C, dann ist BCZ der gesuchte Ort.

4) Den Ort von $y = -ax - b$ zu finden.

Mache $x = o$; folglich $y = -b$. In den verlängerten YA nimm $AB = b$.

Mache $y = o$; folglich $x = -\frac{b}{a}$. In der verlänger-

ten XA nimm $AC = \frac{b}{a}$; verbinde C und B, so ist ZCB die gesuchte Linie.

Zusatz. Diese Methode reicht nicht aus in der Anwendung auf die Gleichung

$$y = ax, \text{ worin } b = o \text{ ist.}$$

Aber da die Linie, die der Ort dieser Gleichung ist, durch den Anfangspunkt gehn muß (§. 7.), so hat man nur die Lage eines andern Punktes in der Linie zu bestimmen, welches erreicht wird, wenn man x irgend einen willkürlichen Werth beilegt, und dann den sich ergebenden Werth von y construirt.

In der vorstehenden Aufgabe haben wir die Axen als rechtwinklich angenommen, aber dasselbe Verfahren ist anwendbar, welches auch immer ihre Neigung sei.

§. 12. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes seien x', y', und die irgend eines andern Punktes seien x, y.

Nun ist die Gleichung einer geraden Linie ganz allgemein

$$y = ax + b \; \ldots\ldots\ldots \; (1),$$

und da x', y' die Coordinaten eines Punktes in der Linie sind, so müssen sie mit dieser Gleichung übereinstimmen; also

$$y' = ax' + b;$$

daher

$$b = y' - ax'.$$

Substituirt man diesen Werth von b in (1), so hat man

$$y = ax + y' - ax'$$

oder

$$y - y' = a(x - x'),$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Der Coefficient a ist unbestimmt, weil eine unendliche Anzahl von Linien gezogen werden kann, die alle durch denselben Punkt gehn.

§. 13. Zusatz. Wenn der gegebene Punkt in der Axe des x liegt, so ist $y'=o$, und die Gleichung wird

$$y=a(x-x');$$

und wenn der gegebene Punkt in der Axe der y liegt, so ist $x'=o$, und die Gleichung wird

$$y-y'=ax.$$

§. 14. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte seien x' y' und x'', y'', und die irgend eines andern beliebigen Punktes in derselben Linie x, y.

Dann ist allgemein

$$y=ax+b \ldots\ldots (1.)$$

und da die gegebenen Coordinaten dieser Gleichung genügen müssen, so hat man auch

$$y'=ax'+b \ldots\ldots (2)$$

und

$$y''=ax''+b \ldots\ldots (3).$$

Da nun die Lage einer geraden Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht, bestimmt ist, so müssen sich die Größen a und b in der Gleichung (1) durch die Werthe der gegebenen Coordinaten ausdrücken lassen. Um dies zu bewirken, ziehe man die zweite Gleichung nach einander von der ersten und dritten ab, und man wird haben

$$y-y'=a(x-x') \ldots\ldots (4),$$

und

$$y''-y'=a(x''-x')$$

daher $$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
substituirt man dies in (4), so ist
$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$
welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 15. Zusatz 1. Wenn einer der Punkte z. B. der zweite in der Axe von x liegt, so ist $y'' = o$, und die Gleichung wird
$$y - y' = -\frac{y'}{x'' - x'}(x - x').$$

§. 16. Zusatz 2. Wenn derselbe Punkt auf der Axe der y liegt, so ist $x'' = o$, und die Gleichung wird
$$y - y' = -\frac{y'' - y'}{x'}(x - x').$$

§. 17. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Linie parallel gezogen ist, zu finden.

(Fig. 8.) Es sei Q der gegebene Punkt, und x', y' seine Coordinaten; BZ die gegebene Linie, und ihre Gleichung $y = ax + b$.

Durch Q ziehe QR parallel mit BZ, so daß sie die verlängerte XA in R treffe. Dann ist die Form der Gleichung §. 11,
$$y - y' = A(x - x') \ldots\ldots\ldots (1),$$
aber $A = \text{tang}\, QRX = \text{tang}\, ZCX = a$;
daher durch Substitution in (1),
$$y - y' = a(x - x'),$$
welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 18. Zusatz. Daher ist die Gleichung einer Linie, die parallel mit einer andern ist, deren Gleichung

$$y=ax+b \text{ ist}$$

$$y=ax+b'.$$

§. 19. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt, senkrecht aus einer gegebenen Linie gezogen ist.

(Fig. 9.) Es sei Q der gegebene Punkt, x', y' seine Coordinaten; CZ die gegebene Linie, und ihre Gleichung

$$y=ax+b.$$

Durch Q ziehe QR senkrecht auf CZ, so daß sie AX in R treffe.

Da nun QR durch einen gegebenen Punkt geht, so ist ihre Gleichung nach §. 11. von der Form

$$y-y'=A(x-x') \ldots\ldots (1),$$

aber

$$A = \text{tang } QRX = -\text{tang } QRA,$$
$$= -\text{cotg } ZCX,$$
$$= -\frac{1}{a};$$

daher durch Substitution in (1)

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x'),$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 20. Zusatz. Daher ist die Gleichung einer Linie, die senkrecht auf einern andern, deren Gleichung ist

$$y=ax+b$$

$$y=-\frac{1}{a}x+b'.$$

§. 21. Die Tangente des Winkels zu finden, unter welchen sich zwei gegebene gerade Linien schneiden.

(Fig. 10.) Es seien BZ, B′Z′ die gegebenen geraden Linien, deren Gleichungen sind

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b'.$$

Wenn durch den Anfangspunkt die Linien AL, AL′ zu den Linien BZ, B′Z′ respective parallel gezogen werden, so sind ihre Gleichungen (§. 7.)

$$y = ax, \text{ und } y = a'x.$$

Nun ist $LAL' = LAX - L'AX$;

daher $\tan LAL' = \frac{\tan LAX - \tan L'AX}{1 + \tan LAX \cdot \tan L'AX}$,

d. h., wenn $\tan LAL' = m$,

$$m = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

welches der für die Tangente gesuchte Ausdruck ist.

§. 22. Zusatz. Wenn die Linien parallel sind, ist $a = a'$, und wenn sie auf einander senkrecht sind, ist

$$1 + aa' = o, \text{ oder } a' = -\frac{1}{a},$$

wie in §. 18. und §. 20.

§. 23. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen geraden Linie einen gegebenen Winkel macht.

Es sei m die Tangente des gegebenen Winkels, und die Gleichung der gegebenen Linie sei

$$y = ax + b \ldots\ldots (1),$$

dann ist die gesuchte Gleichung von der Form

$$y - y' = A(x - x') \ldots\ldots (2),$$

in welcher A zu bestimmen ist.

Aber nach dem letzten Satze ist

$$m = \frac{A - a}{1 + Aa};$$

d. h. $\quad m + Aam = A - a;$

d. h. $\quad m + a \quad = A - Aam = A(1 - am);$

folglich $\quad A = \frac{a + m}{1 - am};$

substituirt man dies in (2), so hat man

$$y - y' = \frac{a + m}{1 - am}(x - x'),$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 24. Zusatz 1. Wenn die Linien parallel sind, so ist $m = o$; daher wird die Gleichung

$$y - y' = a(x - x')$$

wie in §. 17.

§. 25. Zusatz 2. Wenn die Linien senkrecht sind, ist m unendlich groß; daher, weil a im Zähler und 1 im Nenner in Bezug auf m verschwinden, so wird die Gleichung

$$y - y' = \frac{m}{-am}(x - x'),$$

d. h. $\quad y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'),$

wie in §. 19.

§. 26. Die Entfernung zweier Punkte durch die Werthe ihrer Coordinaten auszudrücken.

(Fig. 11.) Es seien PQ die gegebenen Punkte, x′ y′ die Coordinaten des ersteren, x″, y″ die des andern.

Durch Q ziehe QR parallel zu AX, welche die Ordinate von P in R trifft.

Dann ist $PQ^2 = QR^2 + RP^2$
$$= (AN - AM)^2 + (MP - QN)^2$$
$$= (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2;$$
d. h. $$PQ = \sqrt{\{(x''-x')^2 + (y''-y')^2\}},$$
welches die gesuchte Entfernung ist.

§. 27. Zusatz. Wenn einer von beiden Punkten, z. B. P mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, dann ist x' und $y' = 0$;
also $$AQ = \sqrt{(x''^2 + y''^2)}.$$

§. 28. Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchen sich zwei gerade Linien einander schneiden. (Fig. 12.)

Es seien $y = ax + b \ldots\ldots. (1)$,
und $$y = a'x + b' \ldots\ldots. (2),$$
die Gleichungen der beiden Linien BZ, B'Z', die sich in P schneiden; und x', y' bedeute die Coordinaten AM und PM des Durchschnittspunktes.

Da nun der Punkt P den beiden Linien BZ, Z'B' gemeinschaftlich ist, so werden seine Coordinaten beiden obigen Gleichungen genügen. Man hat daher
$$y' = ax' + b,$$
$$y' = a'x' + b;$$
woraus, indem y' aus diesen Gleichungen eliminirt wird, folgt
$$(a - a')\, x' = -(b - b');$$
also $$x' = -\frac{b - b'}{a - a'};$$
eliminirt man auch x' aus denselben Gleichungen, so ist
$$y' = \frac{ab' - ba'}{a - a'},$$
welches die gesuchten Coordinaten sind.

§. 29. Aus der vorstehenden Aufgabe ergiebt sich also, daß der Durchschnitt irgend zweier geraden Linien analog ist mit der Elimination des x und y aus ihren Gleichungen. Da diese Bemerkung auf was immer für zwei, in einer Ebene gelegene, gerade Linien anwendbar ist, so kann als allgemeiner Grundsatz festgestellt werden: daß die Elimination zwischen irgend zwei Gleichungen übereinstimmt mit dem Durchschnitte ihrer Oerter.

§. 30. Die Länge der Senkrechten zu finden, die von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie gezogen ist.

(Fig. 9.) Die Coordinaten des gegebenen Punktes Q seien x', y' und die Gleichung der gegebenen Linie BZ sei

$$y = ax + b.$$

Dann ist die Gleichung für QR, die durch Q geht und senkrecht auf BZ ist, nach §. 18.

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

Da nun der Durchschnittspunkt P beiden Linien gemeinschaftlich ist, und x'', y'' dessen Coordinaten sind, so werden diese den obigen Gleichungen ein Genüge leisten; daher

$$y'' = ax'' + b \ldots\ldots (1)$$

und $y'' - y' = -\frac{1}{a}\left(x'' - x'\right) \ldots\ldots (2).$

Aber $PQ = \sqrt{\left\{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2\right\}}$ §. 19.

$$= \sqrt{\left\{(x'' - x')^2 + \frac{1}{a^2}(x'' - x')^2\right\}},$$

indem man für $y'' - y'$ seinen Werth aus (2) substituirt;

$$= \pm \frac{x'' - x'}{a} \sqrt{a^2 + 1} \ldots\ldots 3$$

Um nun x'' zu finden, muß man y'' aus (1) und (2) eliminiren; dann hat man

$$ax'' + b - y' = - \frac{1}{a} (x'' - x');$$

daher $a^2x'' + ab - ay' = - x'' + x'$;

$$x'' = \frac{ay' - ab + x'}{a^2 + 1}$$

also $x'' - x' = \dfrac{ay' - ab - a^2x}{a^2 + 1}$;

Dies nun in (3) substituirt hat man

$$PQ = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

welches der gesuchte Werth ist.

§. 31. Zusatz 1. Wenn die gegebene Linie BZ durch den Anfangspunkt geht, ist $b = o$ und

$$PQ = \pm \frac{y' - ax'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

§. 32. Zusatz 2. Wenn der gegebene Punkt Q mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, dann ist x' y' beides $= o$, und

$$PQ = \mp \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

je nachdem die Linie unter- oder oberhalb AX liegt.

Bemerkung. Um Wiederholung zu vermeiden, werden wir in Zukunft den Punkt, dessen Coordinaten x' und y' sind,

als den Punkt (x′, y′) bezeichnen; und die gerade Linie, deren Gleichung ist

$$y = ax + b$$

als die gerade Linie

$$y = ax + b.$$

Drittes Kapitel.

Vom Kreise.

§. 33. Die Gleichung des Kreises zu finden.

(Fig. 13.) Es sei C der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Gleichung gesucht wird.

Da die Lage der Axen willkürlich ist, so wollen wir annehmen,

1) der Mittelpunkt sei der Anfangspunkt.

Es sei CX irgend ein Diameter, ziehe nun CY senkrecht auf demselben: im Umfange nimm irgend einen Punkt P, und von diesem ziehe die Senkrechte PM auf CX, nimm CM=x, MP=y, CP=r.

Dann ist in dem rechtwinklichten Dreiecke CMP,

$$CM^2 + MP^2 = CP^2;$$

oder durch Substitution

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

und da dieselbe Beziehung der Coordinaten eines jeden andern Punktes im Umfange bewiesen werden kann; so ist die verlangte Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\ldots\ldots (1).$$

2) Es sei der Endpunkt irgend eines Diameters als der Anfangspunkt angenommen.

(Fig. 14.) Es sei A der Anfangspunkt, $AM = x$, $MP = y$. Dann ist nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises

$$MP^2 = AM \cdot MB$$

oder

$$y^2 = x(2r - x)$$
$$= 2rx - x^2 \ldots\ldots\ldots (2),$$

welches die verlangte Gleichung ist.

3) Es werde irgend ein Punkt in der Axe der x als Anfangspunkt angenommen. (Fig. 15.)

Dann hat man, wenn $AC = x'$, wie vorher

$$CM^2 + MP^2 = CP^2,$$

oder

$$(x - x')^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots (3).$$

Auf gleiche Weise, wenn der Anfangspunkt in der Axe der y liegt, wird die Gleichung sein

$$x^2 + (y - y')^2 = r^2.$$

§. 34. Es werde irgend ein beliebiger Punkt, innerhalb oder außerhalb des Kreises als der Anfangspunkt angenommen. (Fig. 16.)

Es seien die Coordinaten AD, DC des Mittelpunktes durch x' und y' bezeichnet.

Dann ist

$$CM^2 + MP^2 = CP^2;$$

oder

$$(AN - AD)^2 + (NP - CD^2 = CP^2;$$

d. h.

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2 \ldots\ldots (4),$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Daraus ergiebt sich, daß die Gleichung des Kreises in jedem Falle vom zweiten Grade ist, und daß die Einfachheit ihrer Form von der Lage der Coordinaten Axen abhängt. Die allgemein gebräuchlichsten Gleichungen sind:

1) $x^2 + y^2 = r^2$;

2) $y^2 = 2rx - x^2$.

§. 35. Die Gleichung des Kreises, wenn die Axen rechtwinklicht sind, und in irgend einem beliebigen Punkte anfangen, ist

$$(y-y')^2+(x-x')^2=r^2,$$

welche entwickelt giebt

$$y^2+x^2-2y'y-2x'x+y'^2+x'^2-r^2=o \ldots . (1).$$

Nun ist die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen

$$ay^2+bxy+cx^2+Ay+Bx+C=o \ldots . (2).$$

Vergleicht man die correspondirenden Glieder von (1) und (2), so hat man

$$a=1, \quad b=o, \quad c=1,$$

woraus folgt, daß die allgemeine Form der Gleichung des Kreises, bezogen auf rechtwinklichte Coordinaten, ist

$$y^2+x^2+Ay+Bx+C=o.$$

§. 36. Die Lage und Größe des Kreises zu finden, welcher der Ort der Gleichung

$$y^2+x^2+Ay+Bx+C=o \text{ ist.}$$

Vergleicht man sie mit der Gleichung (1) im letzten §., so ist

$$A=-2y', \quad B=-2x', \quad C=x'^2+y'^2-r^2;$$

daher $\quad y'=-\frac{A}{2}, \quad x'=-\frac{B}{2},$

woraus, da die Coordinaten des Mittelpunktes bekannt sind, die Lage des Kreises bestimmt ist.

Dann, da

$$r^2=x'^2+y'^2-C$$

$$=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C;$$

also $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2-4C)};$

so ist auch die Größe des Kreises bekannt.

Erläuterung. Die Lage und Größe des Kreises zu finden, welcher der Ort der Gleichung

$$y^2+x^2=6x-8y \text{ ist;}$$

durch Umformung hat man

$$y^2+x^2+8y-6x=0 \ldots\ldots (1)$$

und durch Vergleichung dieser mit der Gleichung

$$y^2+x^2-2yy'-2xx'+y'^2+x'^2-r^2=0 \ldots (2)$$

erhält man

$$2y'=-8; \text{ also } y'=-4$$

$$2x'=\ \ 6; \text{ also } x'=\ \ 3;$$

auch $y'^2+x'^2=r^2=16+9$

$$r^2=25;$$

$$\text{also } r=5.$$

Da $r^2=x'^2+y'^2$, so ist klar, daß der Anfangspunkt in dem Umfange liegen muß. Setze daher AY, AX seien rechtwinklichte Axen; auf AX nimm AB=3, von B ziehe unter dem rechten Winkel zu AX die BC, an der entgegengesetzten Seite desselben = 4; dann wird der von C als Mittelpunkt mit CA als Radius beschriebene Kreis der verlangte sein.

§. 37. Den Durchschnitt einer geraden Linie mit dem Kreise zu bestimmen.

Es sei der Kreis, dessen Gleichung ist

$$x^2+y^2=r^2 \ldots\ldots (1)$$

durch eine gerade Linie geschnitten, deren Gleichung ist

$$y=ax+b \ldots\ldots\ldots (2).$$

Es seien ferner x', y' die Coordinaten des Durchschnittes.

Da diese nun der Gleichung (1) und (2) genügen müssen, so haben wir

$$x'^2+y'^2=r^2$$

und $y'=ax'+b,$

aus der zweiten hat man $x' = \frac{y'-b}{a}$; also durch Substitution in der ersten

$$y'^2 + \left(\frac{y'-b}{a}\right)^2 = r^2$$

d. h. $$a^2y'^2 + y'^2 - 2by' + b^2 = a^2r^2$$

d. h. $$y'^2 - \frac{2b}{a^2+1}y' + \frac{b^2-a^2r^2}{a^2+1} = 0,$$

aus welcher quadratischen Gleichung, sich zwei Werthe für y' ergeben; und eben so werden auch durch Substitution in einer der beiden obigen Gleichungen zwei Werthe von x gefunden werden.

Wenn die beiden Werthe von y' gleich sind, fallen die beiden Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt den Kreis; und wenn die beiden Werthe von y imaginair sind, liegt die gerade Linie gänzlich ausserhalb des Kreises.

Daher kann eine gerade Linie den Kreis in nicht mehr als zwei Punkten schneiden.

§. 38. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die den Kreis in einem gegebenen Punkt berührt. (Fig. 17.)

Es seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes; x'', y'' die irgend eines andern Punktes im Umfange nahe an dem ersten.

Dann ist die Gleichung der geraden Linie, die durch diese beiden Punkte geht, und den Umfang schneidet, nach (§. 14.)

$$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x - x') \ldots\ 1.$$

Aber da diese beiden Punkte im Umfange liegen, hat man auch

$$y'^2 + x'^2 = r^2$$
$$y''^2 + x''^2 = r^2;$$

daher $$y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2 = o;$$

und daraus $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'}$$

und durch Substitution in (1)

$$y - y' = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'}(x - x')$$

Nun nehme man an, der Punkt (x'', y'') falle zusammen mit $(x' y')$, so ist $x'' = x'$, $y'' = y'$, und die Secante wird eine Tangente, daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{2x''}{2y''}(x - x')$$

oder $$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x').$$

§. 39. Zusatz. Diese Gleichung kann auf eine einfachere Form gebracht werden; denn indem man beide Seiten mit y' multiplicirt, ist

$$yy' - y'^2 = -xx' + x'^2$$

d. h. $$yy' + xx' = y'^2 + x'^2$$
$$= r^2.$$

Erklärung. Wenn eine gerade Linie senkrecht auf der Tangente im Berührungspunkte gezogen wird, so heißt sie Normale. (Fig. 17.)

§. 40. Die Gleichung der Normale zu finden.

Es sei PT die Tangente in P, von wo man PG unter rechtem Winkel zu PT ziehe.

Da nun PG durch den Punkt (x', y') geht, so ist nun ihre Gleichung von der Form

$$y - y' = A(x - x')$$

aber da nach der Annahme PG senkrecht ist auf PT, deren Gleichung ist

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

$$A = \frac{y'}{x'} \text{ §. 19;}$$

daher ist die gesuchte Gleichung

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

oder indem man mit x' multiplicirt

$$yx' - y'x' = y'x - y'x'$$

oder $$y = \frac{y'}{x'}x,$$

welches die Gleichung einer Linie, die durch den Anfangspunkt geht, ist, der in diesem Falle der Mittelpunkt ist. Daher gehen die Normalen alle durch den Mittelpunkt und umgekehrt, eine gerade Linie von dem Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte ist auf der Tangente senkrecht.

§. 41. **Eine Tangente an einen Kreis zu ziehen von einem gegebenen Punkte außerhalb desselben.**

Es seien x'', y'' die Coordinaten des gegebenen Punktes, und x', y' die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes; dann ist allgemein die Gleichung der Tangente

$$yy' + xx' = r^2,$$

da auch der Punkt (x'', y'') nach der Annahme ein Punkt in der Tangente ist, so hat man

$$y''y' + x''x' = r^2 \; \ldots\ldots (1);$$

ferner, da der Berührungspunkt ein Punkt im Umfange ist, so ist

$$y'^2 + x'^2 = r^2 \ldots\ldots (2).$$

Durch Hülfe dieser beiden Gleichungen können die gesuchten Coordinaten x', y' bestimmt werden.

Die reducirte Gleichung, welche sich durch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, wird offenbar vom zweiten Grade sein. Daher giebt es zwei Berührungspunkte, mit andern Worten, von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte können zwei Tangenten an den Kreis gezogen werden.

Diese Aufgabe gewährt eine Erläuterung des im §. 24. aufgestellten Princips, daß „Elimination aus zwei Gleichungen übereinstimmt mit dem Durchschnitte ihrer Oerter."

Die beiden resultirenden Gleichungen sind

$$y'^2 + x'^2 = r^2$$
$$y'y'' + x'x'' = r^2.$$

Die erste von diesen, für sich betrachtet, stellt einen Kreis dar, welcher der Ort aller der Punkte ist, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen; und die andere an sich betrachtet, stellt eine gerade Linie dar, welche der Ort aller Punkte ist, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Werden diese Oerter construirt, und auf dieselben Axen bezogen, so ist klar, daß die Punkte, in welchen sie sich schneiden, die verlangten Berührungspunkte sein werden, weil die Coordinaten dieser Punkte die besondern Werthe von x' und y' sind, welche beiden Gleichungen genügen.

Nun ist der Ort der ersten Gleichung der gegebene Kreis; es werde sein Mittelpunkt C angenommen, als der Anfangspunkt der Axen CX, CY.

Die gerade Linie, welche der Ort der zweiten Gleichung ist, wird construirt wie in §. 9.

Es sei $y' = o$; so ist $x' = \frac{r^2}{x''}$,

$x' = o$; $\therefore$ $y' = \frac{r^2}{y''}$.

In CX nimm $CM = \frac{r^2}{x''}$, und auf CY nimm $CN = \frac{r^2}{y''}$, verbinde M und N, und lasse MN den Kreis in P, p schneiden; dies werden die verlangten Berührungspunkte sein. (Fig. 18.)

§. 42. Zusatz 1. Da die gerade Linie Pp, durch den Durchschnitt mit dem Kreise, die Berührungspunkte bestimmt, so folgt, daß die Gleichung

$$y''y' + x'x'' = r^2,$$

worin x' und y' die Veränderlichen sind, die Gleichung der Linie ist, welche die Berührungspunkte verbindet.

§. 43. Hieraus kann auch der folgende Lehrsatz bewiesen werden.

Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen Linie, Tangenten-Paare an den Kreis gezogen werden, so werden die geraden Linien, die in jedem Falle die Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

Denn es sei C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises (Fig. 18.), Qq die der Lage nach gegebene Linie, und von einem Punkte Q (x'', y'') ziehe zwei Tangenten QP, Qp; von C ziehe die Senkrechte CX auf Qq, auch ziehe CY rechtwinklich zu CX; nimmt man alsdann CX und

CY als Axen, so wird nach dem letzten Zusatze die Gleichung der Linie Pp sein

$$y'y''+x'x'' = r^2,$$

worin x' und y' die Coordinaten von P sind.

Nun begegne Pp der CX, dann ist $y' = 0$, und daher

$$x' = \frac{r^2}{x''} = CM.$$

Da nun dieser Werth von CM unabhängig von y' ist, so wird es dasselbe bleiben für alle Punkte, deren Abscissen = x'' sind, d. h. für alle Punkte in der gegebenen Linie Qq, wie zu beweisen war.

Kegelschnitte.

Erklärung.

§. 44. Ein Kegelschnitt ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem festen Punkte, und einer geraden, der Lage nach gegebenen Linie, zu einander in einem constanten Verhältnisse sind.

(Fig. 19.) So sei S der feste Punkt, Kk eine der Lage nach gegebene feste Linie, P irgend ein Punkt; verbinde PS und ziehe auf Kk die Senkrechte PQ; ist dann PS fortwährend zu PQ in demselben constanten Verhältnisse, so ist der Ort von P ein Kegelschnitt.

Der feste Punkt S heißt der Focus (Brennpunkt), und die gerade Linie Kk, deren Lage gegeben ist, heißt die Directrix (Richtlinie).

§. 45. Die besondere Art des Kegelschnittes hängt von dem constanten Verhältnisse PS : PQ ab, welches

entweder ein Verhältniß der Gleichheit, oder kleineren, oder größeren Ungleichheit ist.

1) Es sei PS = PQ.

Dann heißt der Ort von P die Parabel.

2) Es sei PS < PQ,

dann wird der Ort von P Ellipse genannt.

3) Es sei PS > PQ,

dann wird der Ort von P die Hyperbel genannt.

Von der Parabel.

Erstes Kapitel.

Von der Parabel, bezogen auf ihre Axen.

§. 46. Die Gleichung der Parabel zu finden.

Die Parabel ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernung vom Focus immer dem senkrechten Abstande von der Directrix gleich ist. (Fig. 20.)

Es sei S der Focus, Kk die Directrix, P irgend ein Punkt in der Parabel; durch S ziehe die unbegränzte Linie ESX senkrecht auf die Directrix; von P ziehe die Senkrechten PM, PQ respective auf EX, Kk, und verbinde P, S.

Wird dann ES in A in zwei gleiche Theile getheilt, so ist A, der Definition gemäß, ein Punkt der Parabel;

von A ziehe AY rechtwinklicht zu AX, und nimm AX und AY als die rechtwinklichten Axen, auf welche die Parabel bezogen werden soll.

Es sei $AM = x$, $MP = y$, und $AS = m$.

Dann ist $SP^2 = PM^2 + MS^2 = y^2 + (x - m)^2 \ldots\ldots (1)$,

aber $SP^2 = PQ^2 = EM^2 = (EA + AM)^2$

$$= (m + x)^2 \ldots\ldots (2).$$

Woraus, wenn diese beiden Werthe von SP^2 gleichgesetzt werden, folgt

$$y^2 + (x - m)^2 = (x + m)^2$$

also $$y^2 = 4mx,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 47. Die Gestalt der Parabel aus ihrer Gleichung zu bestimmen.

Indem dieselben Axen beibehalten werden, ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 4mx$$

oder $$y = \pm 2\sqrt{mx}.$$

Es sei $x = 0$; dann ist $y = 0$;

daher geht die Kurve durch den Anfangspunkt A.

Es werde angenommen, x habe irgend einen positiven Werth.

Alsdann giebt es für jeden Werth von x zwei gleiche Werthe von y mit entgegengesetzten Zeichen; wenn x wächst, wachsen auch die Werthe von y; und wenn x unendlich groß genommen wird, werden auch die Werthe von y unendlich groß.

Es werde nun x von irgend einem negativen Werthe angenommen.

Indem nun die Werthe von y in diesem Falle imaginair werden, so ist klar, daß kein Theil der Kurve an der linken Seite von A liegen kann. Die Parabel

besteht demnach aus zwei unendlichen Armen, AZ, Az, die an der rechten Seite von A und symmetrisch in Bezug auf die gerade Linie AX liegen. (Fig. 21.)

Der Punkt A heißt der Scheitel, und die Linie AX die Axe der Parabel.

§. 48. Zusatz 1. Die Parabel kann nur einen Focus und nur eine Directrix haben.

§. 49. Zusatz 2. Den Werth von SL der Ordinate, die durch den Focus geht, zu finden.

Im Punkte S, $x = AS = m$.

Daher $y^2 = 4m^2$

also $y = \pm 2m = SL$ oder Sl.

Die Doppelordinate Ll, die durch den Focus geht, heißt der Hauptparameter, oder latus rectum, der Parabel.

§. 50. Zusatz 3. Daher, wenn P irgend ein Punkt der Parabel, (Fig. 20.) ist, so ist

$$PM^2 = Ll \cdot AM:$$

d. h. das Quadrat der Ordinate ist gleich dem Hauptparameter, multiplicirt durch die zugehörige Abscisse.

§. 51. Den Durchschnitt einer geraden Linie mit der Parabel zu finden.

Die Gleichung der gegebenen geraden Linie sei

$$y = \alpha x + \beta \ldots\ldots (1).$$

Alsdann werden die Coordinaten des Punktes oder der Punkte des Durchschnitts mit der Parabel bestimmt werden können, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung

$$y^2 = 4mx \ldots\ldots (2)$$

verbindet. Substituirt man in (2) den aus (1) abgeleiteten Werth von x, so hat man

$$y^2 = 4m \cdot \frac{y-\beta}{\alpha},$$

oder $$y^2 - \frac{4m}{\alpha} y + \frac{4m\beta}{\alpha} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung giebt zwei Werthe von y, welche in (1) substituirt zwei correspondirende Werthe für x geben; daraus können die verlangten Coordinaten bestimmt werden.

Wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung gleich sind, so fallen die Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie wird die Parabel berühren; und wenn die beiden Wurzeln imaginair sind, fällt die gerade Linie gänzlich außerhalb der Parabel.

Daraus ist klar, daß eine gerade Linie die Parabel in nicht mehr als in zwei Punkten schneiden kann.

Der Theil der geraden Linie, welcher innerhalb der Parabel liegt, heißt Sehne; wenn sie durch den Focus geht, heißt sie Focal-Sehne.

§. 52. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche die Parabel in einem gegebenen Punkte berührt.

Es seien x′, y′ die Coordinaten des gegebenen Punktes, und x″, y″ die irgend eines andern Punktes in der Parabel, nahe an dem ersten.

Dann ist die Gleichung der geraden Linie, die durch diese zwei Punkte gezogen wird, und die Parabel schneidet

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots\ldots (1)$$

Da aber diese Punkte in der Parabel liegen, hat man

$$y'^2 = 4mx',$$

und $$y''^2 = 4mx'';$$

daher $$y''^2 - y'^2 = 4m(x'' - x');$$

also $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{4m}{y'' + y'},$$

daher wird die Gleichung (1) durch Substitution

$$y - y' = \frac{4m}{y'' + y'}(x - x').$$

Man nehme nun an, der Punkt (x'', y'') falle mit dem Punkte (x', y') zusammen, so ist

$$x'' = x', \quad y'' = y'$$

und die Secante, oder schneidende Linie wird eine Tangente.

Daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{2m}{y'}(x - x'),$$

in welcher x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes, und x, y die veränderlichen Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Tangente sind.

§. 53. Zusatz. Die Gleichung der Tangente kann unter einer bequemern Form dargestellt werden; denn multiplicirt man beide Seiten mit y', so hat man

$$yy' - y'^2 = 2mx - 2mx',$$

aber $$y'^2 = 4mx';$$

also $$yy' = 2mx + 4mx' - 2mx'$$
$$= 2m(x + x'),$$

welches die am meisten gebräuchliche Form ist.

§. 54. Den Durchschnitt der Tangente mit der Axe zu finden. (Fig. 22.)

In der Gleichung

$$yy' = 2m\,(x+x')$$

sei $y = o$, wie z. B. in T, dann ist $x+x' = o$, oder

$$x = -x';$$

d. h. $AT = AM$;

indem das negative Zeichen bloß anzeigt, daß AT in der entgegengesetzten Richtung von AM muß genommen werden.

§. 55. Zusatz 1. Hieraus folgt $MT = 2MA$.

Erklärung. Die Linie MT zwischen dem Fußpunkte der Ordinate und dem Punkte, wo die Tangente die Axe schneidet, heißt Subtangente.

Es ergiebt sich daher, daß die Subtangente gleich ist der doppelten Abscisse.

§. 56. Zusatz 2. Hieraus läßt sich eine einfache Methode ableiten, an einen gegebenen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Es sei P der gegebene Punkt, und AM, PM seine Coordinaten; in den verlängerten MA nimm $AT = AM$, verbinde T und P, dann berührt TP die Parabel in P.

Erklärung. Die gerade Linie, welche im Berührungspunkte senkrecht auf die Tangente gezogen wird, heißt die Normale.

§. 57. Die Gleichung der Normale zu finden.

Es berühre TP die Parabel in P, und von diesem Punkte ziehe Pg senkrecht auf PT.

Da nun Pg senkrecht zu PT ist, deren Gleichung ist

$$y-y' = \frac{2m}{y'}\,(x-x')$$

so wird die Gleichung von Pg sein

$$y - y' = -\frac{y'}{2m}(x - x').$$

§. 58. Den Durchschnitt der Normale mit der Axe zu finden.

Wenn die Normale die Axe schneidet, wie in G, dann ist $y = 0$;

also $$-y' = -\frac{y'}{2m}(x - x')$$

daher $$x - x' = 2m;$$

d. h. $AG - AM$, oder $MG = 2m$.

Erklärung. Die Linie MG, zwischen dem Fuß der Ordinate und dem Punkte, wo die Normale die Axe schneidet, heißt die Subnormale.

Hieraus ergiebt sich, daß die Subnormale gleich ist der Hälfte des Hauptparameters.

Wir haben die Normale angesehn, als die unendliche Linie Pg, aber gewöhnlich ist dieser Name der geraden Linie PG zu geben, welche zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte der Axe liegt, in welchem Pg die Axe schneidet.

§. 59. An eine Parabel eine Tangente von einem gegebenen Punkte (x'', y'') außerhalb derselben zu ziehn.

Es seien x', y' die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes.

Da die Gleichung der Tangente allgemein ist

$$y = \frac{2m}{y'}(x + x'),$$

und der Punkt (x'', y'') nach der Annahme ein Punkt in der Tangente ist, so hat man

$$y'' = \frac{2m}{y'}(x'' + x') \ldots\ldots (1).$$

Da auch der Berührungspunkt (x', y') ein Punkt in der Parabel ist, so ist auch

$$y'^2 = 4mx' \ldots\ldots\ldots (2);$$

hieraus, durch Hülfe der zwei Gleichungen, können die Coordinaten x', y' des Berührungspunktes bestimmt werden.

Da die Gleichung welche sich durch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grade ist, so folgt, daß es zwei Berührungspunkte giebt, oder, daß von einem Punkte außerhalb der Parabel zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden können.

Mann kann jedoch zugleich, wie in (§. 41.) die Lage der Berührungspunkte bestimmen, indem man die Oerter von (1) und (2), in welchen x', y' die veränderlichen Größen sind, construirt.

Nun ist aber der Ort von (2) die gegebene Parabel und der von (1) ist offenbar eine gerade Linie, deren Lage bestimmt werden kann, wenn man nach und nach x' und $y' = o$ setzt. (§. 11.)

Wenn $x' = o$, so ist $y' = 2m\frac{x''}{y''}$,

$y' = o$, so ist $x' = -x''$.

Hiernach *) nimm AM in der entgegengesetzten Lage zu $AX = x''$ und in AY nimm $AN = 2m\frac{x''}{y''}$; verbinde M, N und lasse MN die Parabel in dem Punkte P, p schneiden; dies werden die gesuchten Berührungspunkte sein.

---

*) Siehe Fig. in §. 41, welche leicht für die Parabel umgeändert werden kann.

§. 60. Zusatz 1. Da die gerade Linie, welche oben construirt worden ist, durch ihren Durchschnitt mit der Parabel die Berührungspunkte bestimmt, so folgt, daß die Gleichung

$$y'' y' = 2m (x' + x''),$$

in welcher x' und y' die Veränderlichen sind, die Gleichung der unendlichen geraden Linie ist, die die Berührungspunkte verbindet.

§. 61. Zusatz 2. Weil AM unabhängig von y'' ist, so wird es dasselbe bleiben für alle Punkte, deren Abscissen $= x''$ sind, d. h. für alle Punkte in der unendlichen Linie Qq, die von Q senkrecht auf AX gezogen ist. Hieraus folgt der Lehrsatz:

Wenn von verschiedenen Punkten einer zur Axe senkrechten Linie Tangenten-Paare an die Parabel gezogen werden, so werden die Sehnen, welche die Berührungspunkte jeden Paares verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

§. 62. Zusatz 3. Ist die gegebene Linie die Directrix, so ist $x'' = - m$, daher $AM = m = AS$; daher werden in diesem Falle alle Sehnen durch den Focus gehn. Daher ist die Gleichung der Focal-Sehne der Berührung

$$y''y' = 2m (x' - m).$$

Zweites Kapitel.

Von der Parabel, bezogen auf den Focus.

§. 63. **Die Entfernung irgend eines Punktes in der Parabel vom Focus zu finden.**

Es seien x, y die Coordinaten des gegebenen Punktes, und r die gesuchte Entfernung, so ist allgemein die Entfernung irgend zweier Punkte (x, y) und (x', y') nach §. 26.

$$= \sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}}.$$

Da nun der Focus ein Punkt in der Axe AX ist, so ist y' = o, und x' = AS = m; daher durch Substitution

$$r = \sqrt{\{x-m)^2 + y^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(x-m)^2 + 4mx\}}$$

$$= \sqrt{(x+m)^2}$$

$$= x + m,$$

wie verlangt wurde.

§. 64. **Die Polargleichung der Parabel zu finden, wenn der Focus der Pol ist.** (Fig. 23.)

Es sei P irgend ein Punkt, dessen Coordinaten sind AM, MP; es sei SP = r, Winkel ASP = ω.

Nun nach (63) $r = m + x$,

aber $x = AM = AS + SM$

$x = m + SP \text{ cosin } PSM$

$= m - r \text{ cosin } \omega;$

daher durch Substitution

$$r = 2m - r \cos \omega;$$

d. h. $$r = \frac{2m}{1 + \cos \omega} \ldots\ldots\ldots (1)$$

oder $$r = \frac{m}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

§. 65. Zusatz 1. Wenn PS verlängert wird, bis es die Parabel in p trifft, und Sp bezeichnet wird durch r′, so ist, da $ASp = \pi - \omega$

$$r' = \frac{2m}{1 - \cos \omega},$$

oder $$r' = \frac{m}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

§. 66. Zusatz 2. Hieraus

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1 + \cos \omega}{2m} + \frac{1 - \cos \omega}{2m} = \frac{2}{2m}$$

oder $$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP} = \frac{2}{SL}$$

d. h. der halbe Hauptparameter ist das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten irgend einer Sehne, die durch den Focus geht.

§. 67. Zusatz 3. Da $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{r + r'}{rr'}$ auch

$$= \frac{2}{2m};$$

d. h. $$rr' = m\,(r + r'),$$

so ist $$SP \cdot Sp = m \cdot Pp.$$

§. 68. Wenn von dem Berührungspunkte zwei gerade Linien gezogen werden, eine paral=

lel der Axe, und die andere nach dem Focus, so machen sie mit der Tangente gleiche Winkel. (Fig. 24.)

Es sei TP eine Tangente, von P ziehe PX′ parallel zur Axe AX, und verbinde PS; der Winkel tPX′ = SPT. Dann da AT = AM,

$$ST = SA + AT = m + x = SP \ldots\ldots (§.63.)$$

so ist Winkel SPT = Winkel STP,

$$= tPX'$$

weil PX′ parallel zu AX ist.

§. 69. Die Tangente irgend eines Punktes, und die Senkrechte, die man vom Focus auf dieselbe zieht, schneiden AY in demselben Punkte. (Fig. 25.)

Es sei PQ eine Tangente an P, von S ziehe die Senkrechte SQ auf dieselbe; es ist also zu beweisen, daß Q ein Punkt in AY ist.

Die Gleichung für PQ ist

$$y = \frac{2m}{y'}(x + x') \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

und die Gleichung für SQ, von S (x = m, y = o) senkrecht zu PQ gezogen ist (§. 19.)

$$y = -\frac{y'}{2m}(x - m) \ldots\ldots\ldots (2).$$

Wenn nun PQ, und SQ die AY treffen, so muß x = o in beiden Gleichungen sein, man hat daher aus (1)

$$y = 2m\,\frac{x'}{y'} = 2m\,\frac{y'^2}{4my'} = \frac{y'}{2},$$

und aus (2) $y = \frac{y'}{2}$;

da nun diese Werthe von y identisch sind, so treffen PQ und SQ die AY in demselben Punkte.

Zusatz. Man nehme an, PQ treffe XA in T, so ist, weil SQT ein rechter Winkel ist

$$ST \cdot SA = SQ^2,$$

oder da ST = SP, so ist

$$SP \cdot SA = SQ^2.$$

§. 70. Wenn zwei Linien vom Focus gezogen werden, eine nach dem Berührungspunkte, und die andere nach dem Punkte der Directrix, in welchem die Tangente diese trifft, so sind beide auf einander senkrecht. (Fig. 26.)

Es treffe die Tangente an P (x', y') die Directrix EQ in Q, so ist, wenn man SP, SQ zieht, erforderlich, zu beweisen, daß SP senkrecht auf SQ.

Da die Gleichung der Tangente ist

$$y = \frac{2m}{y'}(x + x'),$$

und da, wenn sie die Directrix trifft, $x = -m$ ist, so ist

$$y \text{ oder } EQ = \frac{2m}{y'}(x' - m).$$

Nun ist die Gleichung für SQ

$$y = - \text{tang } QSE\ (x - m),$$

$$= - \frac{QE}{2m}(x - m),$$

d. h.
$$= - \frac{x' - m}{y'}(x - m) \ldots\ldots (1).$$

Ferner, die Gleichung für SP ist

$$y = \text{tang } PSX\ (x - m),$$

$$= \frac{PM}{MS}(x - m),$$

d. h.
$$= \frac{y'}{x' - m}(x - m) \ldots\ldots (2);$$

vergleicht man daher die Coefficienten in (1) und (2) so folgt (§. 20.), daß SP senkrecht auf SQ steht.

Der Satz kann auch noch bewiesen werden, wenn man die Gleichung für die Focal=Sehne der Berührung anwendet. Denn da diese Gleichung (§. 62.) ist

$$y' = \frac{2m}{y''}(x' - m),$$

und die Gleichung für SQ

$$y = -\frac{QE}{ES}(x - m),$$

oder $= -\frac{y''}{2m}(x - m)$, da $QE = y''$,

so folgt, daß SQ auf SP senkrecht ist.

Drittes Kapitel.

Von der Parabel auf irgend einen beliebigen Diameter bezogen.

§. 71. **Den Ort der Mittelpunkte irgend einer beliebigen Anzahl paralleler Sehnen zu finden.**

Es sei Pp (Fig. 27. a. b.) irgend eine Sehne, O ihr Mittelpunkt; von den Punkten P, O, p ziehe die Senkrechten PM. ON, pm. auf die Axe AX; wenn alsdann die Gleichung für Pp ist

$$y = \alpha x + \beta,$$

so wird die Gleichung, die die Werthe von y an den Punkten P, p enthält, sein

$$y^2 - \frac{4m}{\alpha}y + \frac{4m\beta}{\alpha} = o. \quad (\S.\ 51.)$$

Da nun in jeder quadratischen Gleichung, der Coefficient des zweiten Gliedes, mit seinem eigenthümlichen Zeichen, gleich ist der Summe der Wurzeln mit ihren

veränderten Zeichen, so ist

$$\frac{4m}{\alpha} = PM + pm.$$

Da aber O der Mittelpunkt von Pp ist, so ist

$$ON = \frac{PM + pm}{2} \text{ in Fig. a.}$$

d. h. $= \frac{2m}{\alpha}$

Nun ist m unveränderlich, und α bleibt dasselbe für alle Sehnen parallel zu Pp (18), daher ist der Werth von ON unveränderlich; mit andern Worten, wenn ON durch y bezeichnet wird, so ist die Gleichung für die Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen

$$y = \text{const},$$

deshalb ist der gesuchte Ort eine gerade, der Axe AX parallele Linie.

Erklärung 1. Die gerade Linie, von der oben bewiesen ist, daß sie eine beliebige Anzahl paralleler Sehnen halbirt, heißt ein Diameter.

Erklärung 2. Jede Hälfte der so halbirten Sehne heißt eine Ordinate des halbirenden Diameters.

§. 72. Zusatz 1. Die Diameter der Parabel sind parallel zur Axe, und schneiden die Kurve nur in einem Punkte.

Die Wahrheit des ersten Theiles des Zusatzes ist aus dem Satze klar; die des zweiten Theiles kann so gezeigt werden.

Wenn c irgend eine constante Größe ist, so ist die Gleichung irgend eines Diameters $y = c$; der Durchschnitt des Diameters mit der Parabel wird daher bestimmt werden können, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung $y^2 = 4mx$ combinirt.

Man hat also $c^2 = 4mx$

d. h. $$x = \frac{c^2}{4m}$$

daher giebt es nur einen Durchschnittspunkt.

§. 73. Zusatz 2. Wenn die Gleichung irgend einer Sehne ist

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots (1);$$

so wird die Gleichung irgend eines Diameters, der durch irgend einen Punkt (x', y') derselben Sehne geht und halbirt, sein, nach (§. 71.) $y' = \frac{2m}{a} \ldots\ldots (2).$

Umgekehrt, da $a = \frac{2m}{y'}$ ist, wird die Ordinate des Diameters, der durch den Punkt (x', y') geht, zu ihrer Gleichung haben

$$y = \frac{2m}{y'} x + b' \ldots\ldots\ldots (3).$$

§. 74. Zusatz 3. Vergleicht man Gleichung (3) mit der Gleichung der Tangente an den Punkt (x', y') (. 52.), so ist klar, daß die Tangente an den Scheitel irgend eines Diameters gezogen, parallel ist zu der Ordinate desselben Diameters.

§. 75. Die Gleichung der Parabel zu finden, wenn sie auf irgend einen Diameter, und die Tangente an ihrem Scheitel, als Axen, bezogen wird. (Fig. 28.)

Es sei PX′ irgend ein Diameter, und PY′ die Tangente an seinem Scheitel, so nimm Q irgend einen Punkt in der Parabel, und ziehe QM senkrecht zu AX, und QV parallel zu PY′; von P ziehe die Senkrechte PB auf AX.

Nimm AM $=$ x, QM $=$ y; PV $=$ x$'$, QV $=$ y$'$, eben so sei AB $= \alpha$, BP $= \beta$, und der Winkel Y$'$PX$'$ $= \vartheta$.

Es ist nun die Absicht, das Verhältniß zwischen x$'$ und y$'$ zu bestimmen.

Allgemein ist (§. 46.) $y^2 = 4mx \ldots\ldots (1)$.

Aber $y = MN + NQ = \beta + y' \sin \vartheta$,

$x = AB + BM = \alpha + x' + y' \cos \vartheta$;

deshalb durch Substitution in (1)

$$(\beta + y' \sin \vartheta)^2 = 4m\,(\alpha + x' + y' \cos \vartheta),$$

oder entwickelt, und das Resultat nach den Dimensionen von y$'$ geordnet,

$$y'^2 \cdot \sin^2 \vartheta + 2(\beta \sin \vartheta - 2m \cos \vartheta)\, y' + \beta^2 = 4m\alpha + 4mx' \ldots (2)$$

aber da (α, β) ein Punkt in der Parabel ist, so hat man die Gleichung (1),

$$\beta^2 = 4m\alpha,$$

auch $\tan \vartheta = \frac{2m}{\beta}$ (§. 52.);

daher $\beta \sin \vartheta - 2m \cos \vartheta = 0$,

so daß also das Glied, welches y$'$ enthält, verschwindet; deshalb wird Gleichung (2)

$$y'^2 = \frac{4m}{\sin^2 \vartheta} x' \ldots\ldots (3)$$

aber Winkel ASP $+ 2\vartheta = \pi$; also $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ASP;

daher $\frac{m}{\sin^2 \vartheta} = \frac{m}{\cos^2 \frac{1}{2} ASP} = SP$ (§. 64.)

daher duch Substitution in (3)

$$y'^2 = 4SP \cdot x',$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Erklärung. Wenn irgend ein Diameter und die

Tangente in seinem Scheitel als Axen der Coordinaten angenommen werden, so heißen sie conjugirte Axen.

§. 76. Zusatz 1. Hieraus also, indem man die Accente wegläßt, und SP durch m bezeichnet, ergiebt sich die Gleichung der Parabel, bezogen auf einen beliebigen Diameter $y^2 = 4mx$.

Erklärung. Die Doppelordinate, welche durch den Focus geht, heißt der Parameter des zugehörigen Diameter; hieraus:

§. 77. Zusatz 2. Der Parameter eines beliebigen Diameters ist gleich der vierfachen Entfernung seines Scheitels vom Focus.

§. 78. Zusatz 3. Auch folgt hieraus, daß für jeden Punkt der Parabel, das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Parameter, multiplicirt mit der dazu gehörigen Abscisse. Siehe (§. 50.)

§. 79. Die Gleichung der Tangente ist, wenn die Parabel auf einen beliebigen Diameter bezogen ist, von derselben Form, wie vorher, nämlich

$$y = \frac{2m}{y'}(x + x'),$$

indem der Coefficient $\frac{2m}{y'}$ in diesem Falle das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die Tangente mit den Axen von x und y bildet, bezeichnet. (§. 7.)

§. 80. Zusatz. Wenn die Tangente die Axe von x trifft, dann ist $y = o$;

also $x = - x$;

d. h. die Subtangente wird durch die Kurven halbirt, die Coordinaten mögen rechtwinklicht oder schief sein. Siehe (§. 55.)

§. 81. Zusatz 2. Hieraus folgt auch, daß, welches auch immer die Neigung der Axen sei, die Gleichung irgend einer Ordinate eines Diameters, der durch einen Punkt (x′ y′,) geht, ist

$$y = \frac{2m}{y'} x + \beta. \quad \text{Siehe (§. 73.)}$$

§. 82. Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen Linie, Tangenten-Paare an die Parabel gezogen werden, so werden die Linien, die die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

Es sei MN die gegebene Linie, und AX die Axe der Parabel; durch irgend einen Punkt in AX ziehe die Sehne mn parallel zu MN. Es sei ferner PX′ der Diameter, welcher die Sehne halbirt, und an den Scheitel P lege die Tangente PY′, welche (§. 74.) zu MN parallel sein wird.

Dann ist die Gleichung der Parabel, bezogen auf die schiefen Axen PX′ und PY′ (§. 76.)

$$y^2 = 4mx \ldots\ldots\ldots (1);$$

wird nun von irgend einem Punkte in MN (x″, y″) ein Tangenten-Paar an die Parabel gezogen, so kann genau wie in §. 59., welches ein besonderer Fall der in Betrachtung gezogenen Aufgabe ist, bewiesen werden, daß die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$y'' y' = 2m (x' + x'') \ldots\ldots (2),$$

worin

worin x' und y' die veränderlichen Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Es schneide die Sehne (2) die Axe der x, so ist $y' = 0$, und daher $x' = - x''$;
hiernach wird der Durchschnittspunkt derselbe bleiben für alle Punkte, deren Abscissen $= x''$ sind, d. h. für alle Punkte in der gegebenen Linie MN.

§. 83. Wenn von dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten ein Diameter gezogen wird, so halbirt er die Linie, welche die Berührungspunkte verbindet.

Denn die Gleichung einer Ordinate für einen Diameter, der durch (x'', y'') geht, ist (§. 73.)

$$y = \frac{2m}{y''} x + \beta \ldots\ldots (1),$$

und die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$y' = \frac{2m}{y''} (x' + x'') \ldots\ldots (2);$$

daher ist die letztere, indem sie der ersten parallel ist, auch eine Ordinate, und wird daher halbirt.

§. 84. Wenn durch irgend einen Punkt innerhalb oder außerhalb einer Parabel zwei gerade, der Lage nach gegebene Linien, gezogen werden, so daß sie die Kurve treffen, so wird das Rechteck aus den Abschnitten der einen, zu dem Rechtecke aus den Abschnitten der andern, in einem beständigen Verhältnisse sein. (Fig. 29.)

Es sei O irgend ein Punkt innerhalb der Parabel RAr, und durch diesen Punkt werden zwei gerade Linien,

deren Lage gegeben ist, gezogen, so daß sie die Kurven in Rr, und Q, q treffen; so ist zu beweisen, daß das Verhältniß $OR \cdot Or : QO \cdot qo$ ein gegebenes sei.

Durch O ziehe den Diameter PX', es sei PY' eine Tangente an P, ziehe RM parallel zu PY', und setze $PM = x$, $MR = y$; so ist die Gleichung der Parabel, bezogen auf PX' und PY' nach (§. 76.)

$$y^2 = 4mx \; \ldots\ldots \; (1).$$

Setze $OR = r$, $PO = \delta$, $\frac{\sin r, x}{\sin x, y} = p$,

$$\frac{\sin r, y}{\sin x, y} = q \; *).$$

so ist

$$y = pr,$$
$$x = \delta - qr,$$

daher durch Substitution in (1)

$$p^2r^2 = 4m\delta - 4mqr,$$

d. h.

$$r^2 + \frac{4mq}{p^2} r - \frac{4m\delta}{p^2} = o,$$

worin die beiden Werthe von r sind OR und Or; nach der Theorie der Gleichungen daher

$$OR \cdot Or = \frac{4m\delta}{p^2}.$$

Auf gleiche Weise ist, wenn $OQ = r'$, $\frac{\sin r', x}{\sin x, y} = p'$,

$$\frac{\sin r', y}{\sin x, y} = q',$$

*) Die Symbole sin r, x, sin r, y, sin x, y sollen die Sinus der Winkel bezeichnen, welche durch r und die Axe der x, durch r und die Axe der y, und durch die Axen x und y gebildet werden.

$$OQ \cdot Oq = \frac{4m\delta}{p'^2}$$

d. h. $OR \cdot Or : OQ \cdot Oq = p'^2 : p^2$;

da aber die Lage von r, r' nach der Annahme gegeben ist, so sind die Größen p^2, p'^2 bekannt, und daher sind diese Rechtecke zu einander in einem gegebenen Verhältnisse.

Viertes Kapitel.

Vermischte Sätze.

§. 85. Wenn eine Parabel in einer Ebene gegeben ist, die Lage ihrer Axe zu finden. (Fig. 30.)

Ziehe zwei beliebige parallele Sehnen Pp, Qq, und halbire sie in M, N; die gerade Linie, welche M, N verbindet, ist ein Diameter. (§. 71.)

In diesem Diameter nimm einen beliebigen Punkt C, und durch C ziehe RCr senkrecht zu MN, welche die Parabel in R, r trifft. Wenn nun Rr in O halbirt und AOX parallel zu MN gezogen wird, so ist dies die verlangte Axe, wie an sich klar ist.

§. 86. Es sei Pp irgend eine Sehne, welche die Axe in O schneidet; es seien ferner AM, Am beziehungsweise die Abscissen von P und p; zu beweisen, daß nun

$$AM \cdot Am = AO^2. \quad \text{(Fig. 31.)}$$

Es sei die Gleichung zu Pp

$$y = ax + b \;\ldots\ldots\; (1),$$

so werden die Abscissen AM, Am gefunden werden, indem man y aus dieser Gleichung und aus

$$y^2 = 4mx \ldots\ldots\ldots (2)$$

eliminirt. Man hat daher

$$(ax + b)^2 = 4mx$$

oder $$a^2x^2 + (2ab - 4m)x + b^2 = o,$$

oder $$x^2 + 2 \cdot \frac{ab - 2m}{a^2} x + \frac{b^2}{a^2} = o;$$

Daher nach der Theorie der Gleichungen AM · Am $= \frac{b^2}{a^2}$. Aber in dem Punkte O, wo Pp die Axe schneidet ist $y = o$,

d. h. $$x = -\frac{b}{a} = AO,$$

d. h. $$AO^2 = \frac{b^2}{a^2} = AM \cdot Am,$$

wie zu beweisen war.

§. 87. In der Axe AX einer gegebenen Parabel einen Punkt O zu finden, so daß, wenn irgend eine beliebige Sehne POp durch denselben gezogen wird, der Winkel PAp ein Rechter sei. (Fig. 31.)

Denke AP, Ap gezogen, so wird, da sie nach der Annahme einen rechten Winkel bilden, wenn die Gleichung für AP ist

$$y = ax \ldots\ldots\ldots (1)$$

die Gleichung für Ap nach (§. 20) sein

$$y = -\frac{1}{a} x \ldots\ldots\ldots (2).$$

Es seien die Coordinaten von P, x', y' und die von p, x'', y''; so werden diese Coordinaten bestimmt werden

können, wenn man y aus (1) und (2) und der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 4mx \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

eliminirt. Man erhält dann

$$a^2x'^2 = 4mx'; \text{ d. h. } x' = \frac{4m}{a^2} \text{ und } y' = \frac{4m}{a},$$

auch $\frac{x''^2}{a^2} = 4mx''$; d. h. $x'' = 4ma^2$ und y''

$$= -4ma;$$

hiernach ist die Gleichung für Pp (§. 14)

$$y - \frac{4m}{a} = -\frac{4ma + \frac{4m}{a}}{4ma^2 - \frac{4m}{a^2}}\left(x - \frac{4m}{a^2}\right),$$

oder, indem man Zähler und Nenner durch $4ma + \frac{4m}{a}$ dividirt

$$y - \frac{4m}{a} = -\frac{1}{a - \frac{1}{a}}\left(x - \frac{4m}{a^2}\right).$$

Nun nehme man an, Pp schneide AX, z. B. in O, dann ist $y = o$, und

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\frac{4m}{a} = x - \frac{4m}{a^2}$$

d. h. x oder AO = 4m,

woraus folgt, daß ein Punkt, dessen Entfernung vom Scheitel gleich ist dem Parameter, die oben ausgesprochene Eigenschaft hat.

§. 88. Wenn angenommen wird, daß sich Tangenten-Paare an der Parabel unter rechten Winkeln schneiden, den Ort der Durchschnittspunkte zu finden.

Es sei $y = \alpha x + \beta \ldots\ldots (1)$,
die Gleichung einer Linie, welche die Parabel schneidet,

$$y^2 = 4mx \ldots\ldots (2),$$

dann ist die Gleichung, welche die Werthe von y an den Durchschnittspunkten enthält (§. 51.)

$$y^2 - \frac{4m}{\alpha} y + \frac{4m\beta}{\alpha} = o \ldots\ldots (3);$$

aber wenn diese Werthe gleich sind, wird die schneidende Linie eine Tangente; deshalb ist in diesem Falle Gleichung (3) ein vollkommenes Quadrat, deren Eigenschaft ist, daß das vierfache Produkt des letzten Gliedes gleich ist dem Quadrate des Coefficienten des mittlern Gliedes. Man hat daher

$$16 \frac{m\beta}{\alpha} = 16 \frac{m^2}{\alpha^2}$$

d. h. $\frac{m}{\alpha} = \beta = y - \alpha x$, aus (1);

d. h. $m = \alpha y - \alpha^2 x$;

d. h. $\alpha^2 - \frac{y}{x}\alpha + \frac{m}{x} = o$,

in welcher Gleichung die Werthe von (α) die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, welche die beiden Tangenten an der Parabel mit der Axe machen; daher das Produkt dieser Werthe $= \frac{m}{x}$, und auch $= - 1$, da nach der Annahme die Tangenten rechtwinklicht auf einander sind (§. 20);

also $\frac{m}{x} = - 1$

oder $m = - x, \quad x = - m$,

daher ist der Ort ihres Durchschnittes die Directrix.

Von der Ellipse.

Erstes Kapitel.

Von der Ellipse, bezogen auf ihre Axen.

§. 89. Die Gleichung der Ellipse zu finden. (Fig. 32.)

Die Ellipse ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernung vom Focus immer in einem gegebenen Verhältnisse kleiner ist, als die Entfernung von der Directrix.

Es sei S der Focus, Kk die Directrix, P irgend ein Punkt in der Ellipse; durch S ziehe die unendliche Linie ESX senkrecht auf die Directrix; von P ziehe die Senkrechten PM, PQ auf EX und Kk, und verbinde P und S.

Das gegebene Verhältniß von PS : PQ sei gleich e : 1, so daß e kleiner sei als 1; wird dann SE in A so getheilt, daß SA : AE = e : 1, so ist A ein Punkt in der Ellipse.

Von A ziehe AY senkrecht zu AX, und nimm AX, AY als die rechtwinklichten Axen, auf welche die Ellipse bezogen werden soll.

Es sei $AM = x$, $MP = y$, und $AS = m$. Dann ist $SP^2 = PM^2 + MS^2 = y^2 + (x-m)^2 \ldots\ldots(1)$, aber

$$SP^2 = e^2 PQ^2 = e^2 (AE + AM)^2$$

$$= e^2\left(\frac{m}{e} + x\right)^2 \ldots\ldots(2);$$

daher (1) und (2) gleich gesetzt

$$y^2 + (x-m)^2 = m^2 + 2mex + e^2x^2;$$

d. h. $y^2 = 2m(1+e)x - (1-e^2)x^2$

$$= (1-e^2)\left(\frac{2m}{1-e}x - x^2\right),$$

oder wenn $\frac{m}{1-e} = a$ angenommen wird,

$$y^2 = (1-e^2)(2ax - x^2),$$

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 90. Zusatz 1. Halbire Aa in C, und dann in diesem Punkte $x = a$ gesetzt,

d. h. $y^2 = (1-e^2)a^2$

$$y = \pm a\sqrt{1-e^2},$$

welche immer reell ist, da $e < 1$ ist.

Wenn also BCb durch C rechtwinklicht zu Aa gezogen wird, und beides, CB, $Cb = a\sqrt{1-e^2}$ genommen wird, so werden B, b Punkte der Ellipse sein.

§. 91. Zusatz. Es werde Bb mit 2b bezeichnet, dann ist

$$b = \pm a\sqrt{1-e^2};$$

d. h. $\sqrt{1-e^2} = \pm\frac{b}{a};$

deshalb wird, durch Substitution, die obige Gleichung

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \ldots\ldots(1).$$

Erklärung. Die geraden Linien Aa, Bb, bezeichnet durch 2a und 2b, heißen respective die große und kleine Axe; die Punkte A, a, B, b, in welchen sie die Ellipse treffen, heißen Scheitel; und der Punkt C, in welchem sie sich einander schneiden, der Mittelpunkt.

§. 92. **Die Gleichung der Ellipse zu finden, wenn die Coordinaten vom Mittelpunkte genommen werden.**

Es sei P irgend ein Punkt in der Ellipse, ziehe die Senkrechte PM auf Aa, und nimm CM = x′. (Fig. 33.)

Nun ist die Gleichung der Ellipse, wenn die Coordinaten in A anfangen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \ldots\ldots (1),$$

aber
$$x = AM = AC + CM$$
$$= a + x'$$

substituirt man daher diesen Werth vom x, so hat man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a(a + x') - (a + x')^2\right\}$$
$$= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) \ldots\ldots (2)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 93. **Zusatz 1.** Läßt man den Accent weg, der nur gebraucht wurde, um die neue von der alten Abscisse zu unterscheiden, so hat man, durch Multiplication und Versetzung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (3).$$

Wird jedes Glied durch a^2b^2 dividirt, so hat man

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (4).$$

Von den letzten Gleichungen ist die mit (3) bezeichnete die gebräuchlichste.

§. 94. Zusatz 2. Die Gleichungen (1) und (2) drücken, übersetzt in die geometrische Sprache, eine Eigenschaft der Ellipse aus.

Denn wenn P irgend ein Ellipsen-Punkt ist, so hat man $2ax - x^2 = (2a - x)\,x = AM \cdot Ma$, und $a^2 - x'^2 = (a + x')\,(a - x') = AM \cdot Ma$; daher $MP^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \cdot AM \cdot Ma$.

oder $AM \cdot Ma : MP^2 = AC^2 : BC^2$;

d. h.: das Rechteck aus den Abschnitten der großen Axe verhält sich zu dem Quadrate der Ordinate, wie das Quadrat der halben großen Axe zum Quadrate der halben kleinen Axe.

§. 95. Zusatz 3. Wenn $a = b$, so werden Gleichung (1) und (2)

$$y^2 = 2ax - x^2, \text{ und}$$
$$y^2 = a^2 - x^2.$$

welche nach (§. 33.) einen Kreis bezeichnen, dessen Radius $= a$ ist, und welcher deshalb über der großen Axe als Diameter beschrieben ist. Daraus ist klar, daß der Kreis eine Gattung der Ellipse ist.

Wenn also hiernach die Ordinate verlängert gedacht wird, bis sie dem Kreise, der über der großen Axe beschrieben ist, im Punkte Q begegnet, so ist

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

§. 96. Die Gestalt der Ellipse aus ihrer Gleichung zu bestimmen. (Fig. 34.)

Nimmt man die Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

wieder auf, so hat man entweder

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \;\ldots\ldots (1),$$

oder

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \;\ldots\ldots (2),$$

Zuerst, sei in Gleichung (1)
$x = o$, dann ist $y = \pm b = CB$ oder Cb.
$y = o$, dann ist $x = \pm a = CA$ oder Ca.

Ferner $x < \pm a$,
dann giebt es für jeden Werth von x zwei gleiche Werthe für y mit entgegengesetzten Zeichen.

Es sei $x = \pm a$
dann ist $y = \pm o$; d. h. die Ellipse schneidet die Axen der x in den Punkten A und a.

Es sei $x > \pm a$
dann wird die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ, die Werthe von y sind imaginair, und kein Punkt der Ellipse kann jenseits a zur Rechten, oder über A hinaus zur linken liegen.

Daher ist klar, daß die Ellipse eine zusammenhängende Kurve ist, die in sich selbst zurück läuft, und durch die große Axe Aa in zwei congruente Theile getheilt wird.

Auf dieselbe Art kann, wenn man Gleichung (2) untersucht, gezeigt werden, daß die Ellipse die oben angegebene Form hat, und daß sie durch die kleine Axe in zwei congruente Theile getheilt wird.

§. 97. Zusatz 1. Der Abstand des Mittelpunktes vom Focus

$$= CS = AC - AS = a - a\,(1 - e) = ae.$$

Diese Größe heißt die Eccentricität der Ellipse.

§. 98. Zusatz 2. Den Werth der Ordinate durch den Focus zu finden.

Wenn die Ordinate durch den Focus geht, so ist

$$x = ae$$

d. h.
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2e^2)$$
$$= b^2(1 - e^2)$$
$$= \frac{b^4}{a^2} \text{ (§. 91.)}$$

d. h.
$$y = \pm \frac{b^2}{a} = \text{SL oder Sl.}$$

Die Doppelordinate Ll, die durch den Focus geht, heißt der Hauptparameter oder latus rectum.

§. 99. Zusatz 3. Wenn in der Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

x in y, und y in x verwandelt wird, oder mit andern Worten, wenn man die Lage der Axen umkehrt, dann ergiebt sich,

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2;$$

die nähere Betrachtung dieser Gleichung würde auf dieselbe Gestalt der Ellipse leiten, wie vorher. Der Grund ist klar, denn da die Ellipse symmetrisch in Beziehung auf beide Axen ist, so ist es unwesentlich, ob man die Abscissen auf CX und die Ordinaten auf CY, oder die Abscissen auf CY und die Ordinaten auf CX nimmt.

§. 100. Wenn man annimmt, die große Axe werde unendlich groß, so geht die Ellipse in die Parabel über.

Die Gleichung der Ellipse ist (91)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$= \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \ldots\ldots (1).$$

Nun ist $b^2 = a^2 - a^2e^2$

$$= (a + ae)(a - ae)$$

$$= (a + ae)\,AS;$$

d. h. $\frac{b^2}{a} = (1 + e)\,AS;$

und durch Substitution in (1)

$$y^2 = 2AS(1 + e)x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \ldots\ldots (2).$$

Nun sei a unendlich groß angenommen, dann ist $\frac{b^2}{a^2} = o$, und da $a = \frac{m}{1-e}$, so hat man $1 - e = o$ oder $e = 1$; daher also durch Substitution in (2)

$$y^2 = 4AS \cdot x,$$

welches die Gleichung der Parabel ist.

Daraus folgt die Wahrheit des Satzes.

§. 101. Den Durchschnitt einer geraden Linie mit der Ellipse zu finden.

Es sei die Gleichung der gegebenen Linie

$$y = \alpha x + \beta \ldots\ldots\ldots (1).$$

Dann wird man den Punkt oder die Punkte des Durchschnittes mit der Ellipse finden, wenn man diese Gleichung mit der der Ellipse combinirt.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (2).$$

Substituirt man nun in (2) den Werth von x aus (1), so hat man

$$a^2y^2 + b^2\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2 = a^2b^2;$$

d. h. $(a^2\alpha^2 + b^2)\,y^2 - 2b^2\beta y + b^2\beta^2 = a^2b^2\alpha^2$,

oder $y^2 - \frac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2+b^2}\,y + \frac{b^2(\beta^2 - a^2\alpha^2)}{a^2\alpha^2+b^2} = o.$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man zwei Werthe für y, welche in (1) substituirt, zwei entsprechende Werthe für x geben; deshalb können die verlangten Coordinaten bestimmt werden.

Wenn die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung einander gleich sind, so fallen die Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt die Ellipse; und sind sie imaginair, so fällt die gerade Linie ganz außerhalb der Ellipse.

Hieraus ist klar, daß eine gerade Linie eine Ellipse in nicht mehr als zwei Punkten schneiden kann.

Erklärung. Der Theil einer geraden Linie, welcher innerhalb einer Ellipse liegt, heißt eine Sehne; wenn die Sehne durch den Focus geht, so heißt sie Focal-Sehne.

§. 102. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche die Ellipse in einem gegebenen Punkte berührt.

Es seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, und x'', y'' die eines andern Punktes in der Ellipse, nahe dem ersten.

Dann ist die Gleichung der geraden Linie, die durch diese Punkte gezogen ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \ldots\ldots (1).$$

Da aber diese beiden Punkte in der Ellipse sind, so hat man

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2,$$

daher $$a^2 (y''^2 - y'^2) + b^2 (x''^2 - x'^2) = 0,$$

d. h. $$\frac{y''^2 - y'^2}{x''^2 - x'^2} = - \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{(y'' + y')(y'' - y')}{(x'' + x')(x'' - x')} = - \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'};$$

also durch Substitution in (1) kommt

$$y - y' = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'} (x - x').$$

Nun stelle man sich vor, der Punkt (x'', y'') falle mit (x', y') zusammen, dann ist $x'' = x'$, $y'' = y'$, und die schneidende Linie wird eine Tangente am Punkte (x', y'); daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x'),$$

in welcher x, y die veränderlichen Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes in der Tangente sind.

§. 103. Diese Gleichung kann unter einer bequemern Form dargestellt werden, denn multiplicirt man beide Seiten mit $a^2 y'$, so hat man

$$a^2 yy' - a^2 y'^2 = - b^2 xx' + b^2 x'^2,$$

und versetzt man die Glieder

$$a^2 yy' + bxx' = a^2 y'^2 + b^2 x'^2$$

$$= a^2 b^2,$$

welches die Gleichung ist, welche am häufigsten angewandt wird.

§. 104. Den Durchschnitt der Tangente mit den Axen von x und y zu finden. (Fig. 35.)

Da die Gleichung der Tangente ist

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

so möge sie (1) die Axe der x schneiden, z. B. in T; dann ist $y = o$; also $b^2xx' = a^2b^2$; d. h. $x = \frac{a^2}{x'}$

oder $$CT = \frac{CA^2}{CM}.$$

(2) Es schneide die Tangente die Axe der y, z. B. in t; dann ist $x = o$; also $a^2yy' = a^2b^2$; d. h. $y = \frac{b^2}{y'}$,

oder $$Ct = \frac{CB^2}{Cm}.$$

Hieraus folgt, daß jede der halben Axen eine mittlere Proportionale zwischen der Abscisse eines Punktes, und dem Theile der Axe ist, der zwischen dem Durchschnitt mit der Tangente und dem Mittelpunkte liegt.

§. 105. Zusatz 1. Da $CT = \frac{a^2}{x'}$;

so ist $$MT = CT - CM$$
$$= \frac{a^2}{x'} - x'$$
$$= \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Erklärung. Die Linie MT, zwischen dem Fuß der Ordinate, und dem Punkte, wo die Tangente die Axe trifft, heißt die Subtangente.

§. 106.

§. 106. Zusatz 2. Da der Werth der Subtangente unabhängig von der Ordinate y′ ist, so wird er derselbe bleiben für alle Ellipsen, die über derselben grossen Axe Aa beschrieben werden; nun ist der Kreis eine Gattung der Ellipse §. 95; daher also, wenn über der großen Axe ein Kreis beschrieben wird, und die Ordinate MP wird aufwärts verlängert, bis sie den Umfang in Q trifft, so werden Tangenten an P und Q gezogen, die Axe AX in demselben Punkte T schneiden.

Erklärung. Die gerade Linie, welche aus dem Berührungspunkte senkrecht auf der Tangente gezogen ist, heißt Normale.

§. 107. Die Gleichung der Normale zu finden.

TP berühre die Ellipse in P, von diesem Punkte ziehe Pg senkrecht auf PT, so daß sie CA in G, und Cb in g treffe.

Da nun Pg durch den Punkt (x′, y′) geht, rechtwinklicht zu PT, deren Gleichung ist

$$y - y' = -\frac{b^2 \cdot x'}{a^2 \quad y'}(x - x'),$$

so wird nun die Gleichung für Pg (§. 19.) sein

$$y - y' = \frac{a^2 \, y'}{b^2 \, x'}(x - x'),$$

worin x, y die veränderlichen Coordinaten was immer für eines Punktes in der Linie Pg sind, wenn diese als unendlich betrachtet wird.

§. 108. Den Durchschnitt der Normale mit den Axen von x und y zu finden.

Da die Gleichung der Normale ist

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

so möge sie zuerst die Axe der x z. B. in G schneiden, dann ist y = o, und

$$- y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x')$$

d. h. $x - x' = - \frac{b^2}{a^2} x'$;

d. h. $x' - x = \frac{b^2}{a^2} x'$,

oder CM — CG, d. h. $MG = \frac{b^2}{a^2} x'$.

Nun schneide die Normale die Axe der y, z. B. in g; dann ist

$$x = o,$$

$$y - y' = - \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x'$$

d. h. $= - \frac{a^2}{b^2} y'$;

d. h. y oder $Cg = - \frac{a^2 - b^2}{b^2} y'$.

Das negative Zeichen deutet an, daß der Punkt g unterhalb der Axe AX liegt.

Erklärung. Die Linie MG zwischen dem Fuße der Ordinate und dem Punkte, wo die Normale die Axe der x schneidet, heißt **Subnormale**.

Der Ausdruck Normale wird gewöhnlich nur von der endlichen Linie PG gebraucht. (Siehe §. 58.)

§. 109. **Eine Tangente an eine Ellipse von einem gegebenen Punkte (x'', y'') ausserhalb derselben zu ziehn.**

Es seien x′, y′ die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes.

Da nun die Gleichung der Tangente allgemein ist

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

und der Punkt (x″, y″) nach Annahme ein Punkt in der Tangente ist, so hat man

$$a^2y''y' + b^2x''x' = a^2b^2 \ldots\ldots (1);$$

auch da der Punkt der Berührung (x′, y′) in der Ellipse liegt,

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (2);$$

hieraus, durch Hülfe dieser beiden Gleichungen, können die Coordinaten x′, y′ des Berührungspunktes bestimmt werden.

Da die Gleichung, welche sich durch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grade ist, so folgt, daß es überhaupt zwei Berührungspunkte giebt; mit andern Worten, daß von einem gegebenen Punkte ausserhalb der Ellipse zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden können.

Statt die Arbeit der Elimination wirklich zu verrichten, kann man, wie in (§. 41.) und (§. 50.), die Lage der Berührungspunkte finden, wenn man die Oerter der Gleichungen (1) und (2) construirt, in welchen x′, y′ die die veränderlichen Größen sind.

Nun ist der Ort von (2) die gegebene Ellipse, und der Ort von (1), welcher eine Gleichung des ersten Grades ist, ist eine gerade Linie, deren Lage bestimmt ist, indem man x′ und y′ nach und nach = o setzt.

Wenn also in der Gleichung

$$a^2y'y'' + b^2x'x'' = a^2b^2$$

$$x' = o, \text{ so ist } y' = \frac{b^2}{y''},$$

$$y' = 0, \text{ so ist } x' = \frac{a^2}{x''}.$$

Hiernach *) nimm $CM = \frac{a^2}{x''}$, und $CN = \frac{b^2}{y''}$, verbinde M, N, und es schneide MN die Ellipse in P und p, so werden dies die verlangten Berührungspunkte sein.

§. 110. Zusatz 1. Da die gerade Linie MN, welche eben gezogen ist, durch ihren Durchschnitt mit der Ellipse die Berührungspunkte bestimmt, so folgt, daß die Gleichung

$$a^2y''y' + b^2x''x' = a^2b^2$$

worin x' und y' die Veränderlichen sind, die Gleichung der unendlichen Linie ist, die die Berührungspunkte verbindet.

§. 111. Zusatz 2. Da CM unabhängig von y'' ist, so wird es dasselbe bleiben, für alle Punkte, deren Abscissen $= x''$ sind, d. h. für alle Punkte in der unendlichen Linie Qq, die durch Q parallel mit CY gezogen ist. Hieraus ergiebt sich also folgender Lehrsatz:

Wenn von verschiedenen Punkten einer geraden Linie, die senkrecht auf der Axe CX ist, Tangenten-Paare an die Ellipse gezogen werden, so werden die Sehnen, die die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch ein und denselben Punkt gehn.

---

*) Siehe Fig. 18.

Zweites Kapitel.

Von der Ellipse, auf den Focus bezogen.

§. 112. Den Abstand irgend eines Punktes in der Ellipse von einem oder dem andern Focus zu finden.

Es sei der eine Focus S, der andere H, P irgend ein Punkt in der Ellipse; den Werth von SP oder PH zu finden. (Fig. 36.)

(1) Von SP.

Im Allgemeinen ist die Entfernung zweier Punkte (x, y) und (x′, y′) nach §. 26.

$$= \sqrt{\left\{(x - x')^2 + (y - y')^2\right\}},$$

aber die Coordinaten von S, da es ein Punkt in der Axe der x ist, sind

$$x' = ae, \quad y' = o. \quad (\text{§. } 97.)$$

daher
$$\begin{aligned} SP^2 &= (x - ae)^2 + y^2 \\ &= (x - ae)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2). \\ &\qquad\qquad (\text{§. } 91. \text{ und } 92.) \\ &= x^2 - 2aex + a^2e^2 + a^2 - x^2 \\ &\qquad\qquad - e^2a^2 + e^2x^2 \\ &= a^2 - 2aex + e^2x^2 \\ &= (a - ex)^2 \end{aligned}$$

d. h. $SP = a - ex.$

(2) Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß

$$HP = a + ex.$$

Erklärung. Der Abstand irgend eines Focus heißt der Focal-Abstand.

§. 113. Zusatz. Hieraus folgt durch Addition

$$SP + HP = 2a = Aa.$$

Mit andern Worten: die Summe der Focal-Abstände von einem Punkte ist gleich der großen Axe.

Aus dieser Eigenschaft der Ellipse kann die Gleichung der Ellipse abgeleitet werden, wie im folgenden Paragraphen.

§. 114. Den Ort eines Punktes zu finden, dessen Abstände von zwei festen Punkten zusammen genommen immer der gegebenen Größe 2a gleich sind. (Fig. 37.)

Es seien S, H die zwei festen Punkte, P ein Punkt, dessen Ort man sucht.

Verbinde S, H, halbire SH in C, ziehe die Senkrechte PM auf HS, und verlängere HS unbegränzt nach X; von C ziehe CY senkrecht auf CX, und nimm CX und CY als Coordinaten Axen.

Es sei $CM = x$, $MP = y$, und $SC = c$.

Dann ist $\left.\begin{aligned} SP^2 &= y^2 + (c - x)^2 \\ HP^2 &= y^2 + (c + x)^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1);$

d. h. $HP^2 - SP^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2,$

oder $(HP + SP)(HP - SP) = 4cx;$

d. h. $$HP - SP = \frac{4cx}{2a}$$

$$= \frac{2cx}{a},$$

aber $$HP + SP = 2a;$$

daher $$HP = a + \frac{cx}{a},$$

und $$SP = a - \frac{cx}{a}.$$

Erhebt man diese Werthe ins Quadrat, und addirt die Resultate, so hat man

$$SP^2 + HP^2 = 2\left(a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}\right),$$

und auch $$= 2(y^2 + c^2 + x^2) \text{ aus (1);}$$

daher $$y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2};$$

d. h. $$y^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2$$

$$= a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

welches die Gleichung der Ellipse ist, deren große Axe $= 2a$, und deren kleine Axe $= 2\sqrt{a^2 - c^2}$ ist.

Wenn $x = o$, so ist $y^2 = a^2 - c^2 = b^2$, d. h. $b =$ der Ordinate, die aus C gezogen wird.

§. 115. **Die Polar-Gleichung der Ellipse zu finden, wenn der Focus der Pol ist.** (Fig. 38.)

(1) Es sei S der Pol.

Es sei $SP = r$, Winkel $PSA = \omega$;

dann ist $r = a - ex$, (§. 112),

aber $$x = CS - SM$$
$$= ae - r\cos(\pi - \omega)$$
$$= ae + r\cos\omega;$$

d. h. $$r = a - ae^2 - er\cos\omega;$$

d. h. $$r(1 + e\cos\omega) = a(1 - e^2);$$

also $$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega},$$
welches die gesuchte Gleichung ist.

(2) Es sei H der Pol.

Es sei HP $= r'$, und Winkel PHA $= \omega'$;

dann $r' = a + ex$ (§. 112.),

aber $x = CM = HM - HC$

$= r' \cos\omega' - ae$;

also $r' = a + er' \cos\omega' - ae^2$;

d. h. $r'(1 - e\cos\omega') = a(1 - e^2)$;

daher $$r' = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\omega'},$$
welches die verlangte Gleichung ist.

§. 116. Zusatz. Wird PS verlängert bis es die Ellipse in p trifft, so hat man, da der Winkel ASP $= \pi - \omega$ ist

$$Sp = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\omega}.$$

§. 117. Zusatz 2. Hieraus folgt

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{Sp} = \frac{1+e\cos\omega}{a(1-e^2)} + \frac{1-e\cos\omega}{a(1-e^2)}$$
$$= \frac{2}{a(1-e^2)} = \frac{2}{SL}; \text{ (§§. 91. u. 98.)}$$
deshalb ist der halbe Hauptparametrr ein harmonisches Mittel zwischen den Segmenten irgend einer Focal-Sehne.

§. 118. Zusatz 3. Da $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP} = \frac{SP + Sp}{SP \cdot Sp}$,

aber auch $= \frac{2}{a(1-e^2)}$.

so folgt $SP \cdot Sp = \frac{a}{2}(1 - e^2)(SP + Sp)$.

§. 119. Die Polar-Gleichung der Ellipse zu finden, wenn der Mittelpunkt der Pol ist.

Es sei CP $= \varrho$, und Winkel PCA $= \nu$.

Dann ist $\varrho^2 = x^2 + y^2$

$= x^2 + (1-e^2)(a^2-x^2)$, (§§. 91. und 92.)

$= e^2x^2 + a^2(1-e^2)$

$= e^2\varrho^2 \cos^2\nu + a^2(1-e^2)$,

d. h. $\varrho^2(1 - e^2 \cos^2\nu) = a^2(1-e^2)$;

also $\varrho = a\sqrt{\dfrac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\nu}}$,

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 120. Zu beweisen, daß die Focal-Abstände irgend eines Punktes mit der Tangente an diesem Punkte gleiche Winkel bilden. (Fig. 39.)

Es sei TPt eine Tangente an dem Punkte P (x', y'), ziehe die Normale PG, und verbinde S, P und H, P.

Dann $CG = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}x' = e^2x'$;

nun ist $\dfrac{SG}{HG} = \dfrac{SC - CG}{SC + CG} = \dfrac{ae - e^2x'}{ae + e^2x'} = \dfrac{a - ex'}{a + ex'}$

$= \dfrac{SP}{HP}$ (112)

daher der Winkel SPG = Winkel HPG, (Eukl. VI. 3.)

Aber GPT = PGt; also SPT = HPT,

was zu beweisen war.

§. 121. Den Ort der Punkte zu finden, in welchen die Senkrechte vom Focus auf die Tangente irgend eines Punktes, diese Tangente schneidet. (Fig. 40.)

Es sei PT eine Tangente an einem Punkte P (x', y') und SY eine Senkrechte von S auf PT, so daß sie diese in Y treffe; es soll der Ort von Y gefunden werden.

Von C ziehe die Senkrechte CQ auf die verlängerte TP, auch ziehe Sq parallel mit TP, die also CQ in q trifft.

Dann ist $CY^2 = CQ^2 + QY^2 = CQ^2 + Sq^2$
$= CT^2 \cdot \sin^2 T + CS^2 \cos^2 T;$

aber $CT = \frac{a^2}{x'}$ (§. 104.) und $CS = ae$;

daher $CY^2 = \frac{a^4}{x'^2} \sin^2 T + a^2 e^2 \cos^2 T$

$$= \frac{a^4}{x'^2}(1 - \cos^2 T) + a^2 e^2 \cos^2 T$$

$$= \frac{a^4}{x'^2} - \frac{a^2}{x'^2}(a^2 - e^2 x'^2) \cos^2 T \ldots \quad (1).$$

Nun ist $\tan T = -\frac{a^2 x'}{a^2 y'} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x'}{\sqrt{a^2 - x'^2}}$; (§. 96.)

daher $1 + \tan^2 T = 1 + \frac{b^2 x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)}$

$$= \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)}$$

$$= \frac{a^4 - a^2 e^2 x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)} \quad \text{(§. 91.)}$$

$$= \frac{a^2 - e^2 x'^2}{a^2 - x'^2}$$

d. h. $\cos^2 T = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2 x'^2}$;

daher durch Substitution in (1)

$$CY^2 = \frac{a^4}{x'^2} - \frac{a^2}{x'^2}(a^2 - e^2x'^2) \cdot \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2x'^2}$$
$$= \frac{a^4}{x'^2} - \frac{a^2}{x'^2}(a^2 - x'^2)$$
$$= \frac{a^2}{x'^2}(a^2 - a^2 + x'^2) = a^2;$$
$$CY = \pm a,$$

daher ist der Ort von Y ein Kreis, dessen Radius = a ist, und welcher daher über der großen Axe Aa, als Durchmesser, beschrieben ist.

§. 122. **Das Rechteck aus der Senkrechten von jedem Focus auf eine Tangente, ist gleich dem Quadrate der halben kleinen Axe.** (Fig. 40.)

Denn zieht man die Senkrechten SY und HZ von S und H auf die Tangente PT, dann ist

$$SY = ST \sin T,$$

aber $ST = CT - CS = \frac{a^2}{x'} - ae = \frac{a}{x'}(a - ex');$

deshalb $$SY = \frac{a}{x'}(a - ex') \sin T.$$

Auf gleiche Weise $HZ = \frac{a}{x'}(a + ex') \sin T;$

daher $SY \cdot HZ = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - e^2x'^2) \sin^2 T \ldots\ldots (1).$

Nun ist $\cos^2 T = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2x'^2};$

$$\sin^2 T = 1 - \cos^2 T$$
$$= 1 - \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2x'^2}.$$
$$= \frac{x'^2 - e^2x'^2}{a^2 - e^2x'^2};$$

daher durch Substitution in (1)

$$SY \cdot HZ = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - e^2x'^2)\frac{x'^2(1-e^2)}{a^2 - e^2x'^2}$$

$$= a^2(1-e^2) = b^2 \;..\; (\S.\ 91.)$$

Drittes Kapitel.

Von der Ellipse, bezogen auf irgend ein System conjugirter Diameter.

Erster Abschnitt.

Von conjugirten Durchmessern im Allgemeinen.

§. 123. Den Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen zu finden. (Fig. 41.)

Es sei Pp irgend eine Sehne, O ihr Mittelpunkt, und X, Y seine Coordinaten.

Von den Punkten O, P, p, ziehe die Senkrechten ON, PM, pm, auf die Axe AX, alsdann ist, wenn die Gleichung für Pp ist

$$y = \alpha x + \beta,$$

die Gleichung, welche die Werthe von y in den Punkten P, p enthält

$$y^2 - \frac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2 + b^2}\,y + \frac{b^2(\beta^2 - a^2\alpha^2)}{a^2\alpha^2 + b^2} = o,\ (\S.\ 101.)$$

Da nun in jeder quadratischen Gleichung der Coefficient des zweiten Gliedes mit seinem eigenthümlichen

Zeichen gleich ist der Summe der Wurzeln mit den entgegengesetzten Zeichen, so ist

$$\frac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2 + b^2} = PM + pm;$$

da aber O der Mittelpunkt von Pp ist, so ist

$$ON = \frac{PN + pm}{2};$$

d. h. $$Y = \frac{b^2\beta}{a^2\alpha^2 + b^2} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Nun ist $X = \frac{1}{\alpha}(Y - \beta)$

d. h. $$= - \frac{a^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2} \ldots\ldots (2).$$

Um das Verhältniß zwischen X und Y zu erhalten, muß man β aus (1) und (2) eliminiren;

d. h. $$\frac{a^2\alpha^2 + b^2}{b^2} Y = - \frac{a^2\alpha^2 + b}{a^2\alpha} X;$$

daher $$Y = - \frac{b^2}{a^2\alpha} X.$$

Nun bleibt α dasselbe für alle mit Pp parallele Sehnen (§. 18.); daher drückt die oben gefundene Gleichung das Verhältniß der Coordinaten ihrer Mittelpunkte aus, und da sie vom ersten Grade ist, so ist der gesuchte Ort eine gerade Linie.

Erklärung. Die gerade Linie, von der eben bewiesen ist, daß sie der Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ist, heißt ein Diameter, und die Punkte, in welcher sie die Kurve schneidet, heissen die Scheitel.

§. 124. Zusatz. Die Gleichung $Y = - \frac{b^2}{a^2\alpha} X$ ist die Gleichung einer Linie, die durch den Anfangspunkt

geht, der in diesem Falle der Mittelpunkt ist; daher muß jeder Diameter durch den Mitelpunkt gehn.

§. 125. Wenn ein Diameter durch einen gegebenen Punkt gezogen ist, die Gleichung für irgend eine seiner Ordinaten zu finden.

Sind x′, y′ die Coordinaten des gegebenen Punktes, so ist die Gleichung des Diameters, der durch denselben gezogen ist

$$y = \frac{y'}{x'} x \ldots\ldots (1).$$

Es sei $y = \alpha x + \beta \ldots\ldots (2)$
die gesuchte Gleichung für irgend eine Ordinate, dann ist $\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2 \alpha}$ (124.);

$$\alpha = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'},$$

daher hat irgend eine Ordinate des Diameters, der durch (x′, y′) geht, zu ihrer Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} + \beta.$$

§. 126. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung der Tangente (§. 102.), so ergiebt sich, daß die Tangente am Scheitel irgend eines Diameters parallel ist mit den Ordinaten des Diameters.

§. 127. Wenn von irgend zwei gegebenen Diametern die Ordinaten des einen parallel sind dem andern, so werden die Ordinaten des letztern parallel sein dem erstern. (Fig. 42.)

Es seien $y = \alpha x \ldots\ldots (1),$

$y' = \alpha' x \ldots\ldots (2),$

irgend zwei Diameter, CP, CD, dann sind nach dem letzten Paragraphen die Gleichungen irgendwelcher Ordinaten MN, QR beziehungsweise zu dem ersten und dem zweiten

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \alpha} x + \beta \ldots\ldots (1'),$$

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \alpha'} x + \beta' \ldots\ldots (2').$$

Nun nehme man an, die Ordinate MN sei parallel zu dem Diameter CD, dann ist

$$-\frac{b^2}{a^2 \alpha} = \alpha'$$

oder $\alpha = -\frac{b^2}{a^2 \alpha'},$

daher wird die Gleichung für QR durch Substitution in (2') $y = \alpha x + \beta',$

d. h. QR die zweite Ordinate ist parallel dem ersten Diameter CP; was zu beweisen war.

Daher ist jeder dieser Diameter parallel zu den Ordinaten des andern.

Diameter, in solcher Beziehung auf einander, heißen conjugirte Diameter.

§. 128. Zusatz 1. Hiernach also ist, wenn zwei Diameter

$$y = \alpha x$$
$$y = \alpha' x$$

conjugirt sind

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

§. 129. Zusatz 2. Daher also, wenn

$$y = \alpha x$$

ein Diameter ist, so ist

$$y = -\frac{b^2}{a^2\alpha}x$$

der conjugirte Diameter. Die Anzahl von Paaren conjugirter Diameter ist daher unbegränzt.

Wenn $\alpha = o$, oder wenn der erste Diameter ist Aa, dann ist

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \cdot o}x = \infty \cdot x,$$

deshalb ist der conjugirte Diameter zu Aa, indem er auf demselben rechtwinklicht ist, Bb; oder, die Axen der Ellipse sind conjugirte Diameter.

§. 130. Zusatz 3. Wenn (x′, y′) irgend ein Punkt in der Ellipse ist, so ist der Diameter, der durch denselben geht

$$y = \frac{y'}{x'}x,$$

d. h.
$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}x$$

ist der entsprechende conjugirte Diameter.

Aber die Gleichung der Tangente durch (x′, y′) ist (§. 102.)

$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}(x - x') \ldots . (1),$$

woraus folgt, daß die Tangente an dem Scheitel irgend eines Diameters parallel ist dem entsprechenden conjugirten Diameter.

§. 131. Eben ist in Zusatz 2. gezeigt worden, daß die Axen der Ellipse conjugirte Diameter sind, es soll nun

nun bewiesen werden, daß sie das einzige Paar conjugirter Diameter sind, welche senkrecht auf einander sein können. (Fig. 43.)

Denn wo möglich seien CP, CD ein Paar senkrechter, conjugirter Diameter, verschieden von den Axen, und es sei

Winkel PCA $= \vartheta$, Winkel DCA $= \vartheta'$.

Nun ist $\vartheta' = DCA = DCP + PCA,$

$$= \frac{\pi}{2} + \vartheta \text{ nach Annahme;}$$

aber $-\frac{b^2}{a^2} = \alpha\alpha'$ (128.) $= \tang \vartheta \cdot \tang \vartheta'$

$$= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta'},$$

d. h. $a^2 \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta' + b^2 \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta' = 0 \ldots (1)$

aber $\sin \vartheta' = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$

$$= \cos \vartheta,$$

und $\cos \vartheta' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$

$$= -\sin \vartheta;$$

daher durch Substitution in (1)

$$(a^2 - b^2) \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta = 0,$$

oder $\frac{1}{2}(a^2 - b^2) \sin 2\vartheta = 0.$

Da nun $a > b$, so kann diese Gleichung nur richtig sein, wenn man annimmt

$\sin 2\vartheta = 0$; daher $2\vartheta = 0$, oder $= \pi$;

d. h. $\vartheta = 0$, oder $= \frac{\pi}{2}$;

und $\vartheta' = \frac{\pi}{2}$, oder $= 0$;

daher CP und CD beziehungsweise mit CA und CB zusammenfallen müssen, und die Axen sind daher die einzigen conjugirten Diameter, welche rechtwinklicht zu einander sind.

§. 132. **Die Gleichung der Ellipse zu finden, wenn sie auf irgend zwei conjugirte Diameter als Axen bezogen wird.** (Fig. 44.)

Es werden CP, CD irgend ein System coniugirter Diameter als Axen angenommen, nimm irgend einen Punkt Q in der Ellipse, und ziehe QM senkrecht auf CX, und QV parallel zu CY', und von V ziehe VN, VR beziehungsweise parallel zu QM, CA.

Nimm $CM = x$, $MQ = y$; $CV = x'$, $VQ = y'$ eben so sei $CP = a'$, $CD = b'$, Winkel $PCA = \vartheta$, und Winkel $DCA = \varphi$.

Der Zweck ist nun, das Verhältniß zwischen x' und y' zu bestimmen.

Allgemein ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \; . \; . \; . \; . \; (1)$.

Aber $x = CN - MN = x' \cos \vartheta + y' \cos \varphi$,

$y = MR + RQ = x' \sin \vartheta + y' \sin \varphi$;

daher durch Substitution in (1),

$$a^2 (x' \sin \vartheta + y' \sin \varphi)^2 + b^2 (x' \cos \vartheta + y' \cos \varphi)^2 = a^2b^2,$$

oder das Resultat entwickelt und geordnet

$$(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)\, y'^2 + (a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta)\, x'^2 + 2(a^2 \sin\vartheta \sin\varphi + b^2 \cos\vartheta \cdot \cos\varphi)\, x'y' = a^2b^2.$$

Aber in §. 128. wurde gezeigt, daß

$$\alpha\alpha' \text{ oder } \tang \vartheta \cdot \tang \varphi = -\frac{b^2}{a^2},$$

und daraus $a^2 \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + b^2 \cos \vartheta \cdot \cos \varphi = o$; (§. 131.)

Deshalb also verschwindet das Glied, welches x', y' enthält, und die gesuchte Gleichung ist von der Form

$$(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)\, y'^2 + (a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta)\, x'^2 = a^2 b^2 \,..\, (2).$$

Wenn nun die Axe CX' die Ellipse erreicht, ist $y' = o$, und $x' = CP = a'$;

also $$a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta = \frac{a^2 b^2}{a'^2}.$$

Eben so, wenn die Axe CY' die Ellipse erreicht, ist $x' = o$, und $y' = CD = b'$;

daher $$a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi = \frac{a^2 b^2}{b'^2};$$

daher durch Substitution in (2)

$$\frac{a^2 b^2}{b'^2}\, y'^2 + \frac{a^2 b^2}{a'^2}\, x'^2 = a^2 b^2,$$

oder durch Division jedes Gliedes durch $a^2 b^2$,

$$\frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'^2}{a'^2} = 1,$$

oder $$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2,$$

welches beides die gesuchte Gleichung ist.

§. 133. Zusatz 1. Hieraus erhält man, wenn man die Accente der Coordinaten wegläßt,

$$y = \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2}$$

§. 134. Zusatz 2. Die Form der Gleichung zu finden, wenn man die Abscissen von P, den Scheitel des Diameters rechnet.

Es sei $PV = x'$, so ist

$$x = CP - PV = a' - x'.$$

Dieser Werth von x in Zusatz (1) substituirt, giebt

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{2a'x' - x'^2},$$

oder wenn man den Accent von x wegläßt,

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{2a'x - x^2},$$

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 135. Zusatz 3. Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind von derselben Form, als die Gleichungen in Beziehung auf die Axen, und drücken, in geometrische Sprache übertragen, eine Eigenschaft aus, von welcher die in §. 94. angegebene nur ein besonderer Fall ist.

Denn $a'^2 - x^2 = (a' + x)(a' - x) = PV \cdot VG$,
und $2a'x - x^2 = (2a' - x)\, x = PV \cdot VG$;
folglich $VQ^2 = \frac{PC^2}{CD^2} PV \cdot VG$,
oder $PV \cdot VG : VQ^2 = PC^2 : CD^2$;
d. h. das Rechteck aus den Abschnitten irgend eines Diameters, verhält sich zu dem Quadrat der Ordinate, wie das Quadrat des halben Diameters, zum Quadrate des halben zugeordneten Diameters.

§. 136. Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich, daß die Gleichung der Ellipse immer von derselben Form ist, die Axen mögen rechtwinklicht oder schiefwinklicht sein; woraus folgt, daß wenn die Ellipse auf irgend zwei zugeordnete Diameter bezogen wird,

(1) wenn die Gleichung der großen Axe Aa ist $y = \alpha x$,
dann $y = -\frac{b'^2}{a'^2 \alpha} x$
die Gleichung der kleinen Axe Bb ist. Und

(2) daß die Gleichung der Tangente sein wird
$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2.$$

§. 137. Den Durchschnitt der Tangente mit irgend zwei zugeordneten Diametern, als Axen betrachtet, zu finden.

Man denke eine Tangente an irgend einem Punkte Q, begegne CP in T, und CD in t, ziehe die Ordinate QV, Qv *).

Da die Gleichung der Tangente ist
$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2,$$
und die Tangente trifft CX z. B. in T, so ist $y = o$,
daher $$x = \frac{a'^2}{x'} \text{ oder } CT = \frac{CP^2}{CV}.$$
Begegnet die Tangente CY, z. B. in t, dann ist $x = o$,
daher $$y = \frac{b'^2}{y'} \text{ oder } Ct = \frac{CD^2}{Cv};$$
daher sind die gesuchten Durchschnittspunkte gefunden.

Deshalb ist jeder halbe Diameter die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse und dem Theile des Diameters, der durch die Tangente abgeschnitten wird. (Siehe §. 104.)

§. 138. Wenn von verschiedenen Punkten einer, der Lage nach gegebenen, Linie Tangenten-Paare an die Ellipse gezogen werden, so werden die Linien, die die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn. (Fig. 45.)

---

*) Siehe Fig. 44.

Es sei C der Mittelpunkt der Ellipse, MN die gegebene Linie.

Ziehe irgend eine Sehne mn parallel zu MN, und halbire sie durch den Diameter CX; von C ziehe CY parallel zu mn oder MN, dann sind CX, CY die conjugirten Diameter (§. 127); und wenn die Ellipse auf diese als Axen bezogen wird, so ist ihre Gleichung

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \;\ldots\ldots\; (1).$$

Von irgend einem Punkte (x'', y'') in MN ziehe ein Tangentenpaar an die Ellipse, dann kann wie in (§. 109.), welches nur ein besonderer Fall des Satzes ist, gezeigt werden, daß die Gleichung der Linie, die die Berührungspunkte verbindet, ist

$$a'^2y''\,y' + b'^2x''x' = a'^2b'^2 \;\ldots\ldots\; (2),$$

worin x', y' die veränderlichen Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Es schneide die Linie (2) die Axe der x, dann ist $y' = o$, und

daher $$x' = \frac{a'^2}{x''};$$

hiernach ist der Durchschnittspunkt derselbe, für alle Punkte, deren Abscissen $= x''$, d. h. für alle Punkte in der Linie MN, wie zu beweisen war.

§. 139. Der Durchschnittspunkt liegt in dem zugeordneten Durchmesser, welcher der gegebenen Linie parallel ist.

§. 140. **Wenn von dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten ein Durchmesser gezogen wird, so halbirt er die Linie, welche die Berührungspunkte verbindet.**

Denn die Gleichung einer Ordinate eines Durchmessers, der durch (x'', y'') geht, ist (§. 125.)

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''}\, x + \beta \ldots\ldots (1),$$

und die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$y' = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x' + \frac{b'^2}{y''} \; \ldots . \; (2);$$

hiernach ist die letztere parallel zu der erstern, ist daher eine Ordinate, und deshalb halbirt.

§. 141. Wenn durch irgend einen Punkt innerhalb oder ausserhalb der Ellipse zwei, der Lage nach gegebene, Linien gezogen werden so, daß sie die Kurve treffen, so wird das Rechteck aus den Abschnitten der einen zu dem Rechteck aus den Abschnitten der andern in einem constanten Verhältnisse sein. (Fig. 46.)

Es sei O irgend ein Punkt innerhalb der Ellipse, ziehe durch denselben zwei Linien Pp, Qq, deren Lage als bekannt angenommen wird so, daß sie der Ellipse in P, p und Q, q begegnen; so soll nun gezeigt werden, daß

$$OP \cdot Op : OQ \cdot Oq$$

in einem constanten Verhältnisse stehe.

Durch O ziehe den Diameter CX, und CY sei sein conjugirter Durchmesser. Wird nun die Ellipse auf diese Diameter als Axen bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2 \; \ldots . \; (1).$$

Durch P ziehe PM parallel zu CY, und setze

$$OP = r, \quad CO = \delta;$$

dann ist $\frac{PM}{PO} = \frac{\sin POM}{\sin PMO} = \frac{\sin r, x \; {}^{*})}{\sin x, y} = p$ (angenommen)

d. h. $y = pr$; auf gleiche Weise, wenn $\frac{\sin r, y}{\sin x, y} = q$,

---

1) Siehe Anmerkung §. 84.

so ist $x = CO + ON = \delta + qr$;
daher durch Substitution dieser Werthe von x und y in (1),

$$a'^2p^2r^2 + b^2 \left\{\delta^2 + 2\delta qr + q^2r^2\right\} = a'^2b'^2;$$

d. h. $(a'^2p^2 + b'^2q^2)\, r^2 + 2\delta q b'^2 r + b'^2 (\delta^2 - a'^2) = o$;

d. h. $r^2 + \frac{2\delta q\, b'^2}{a'^2p^2 + b'^2q^2}\, r + \frac{b'^2 (\delta - a'^2)}{a'^2p^2 + b'^2q^2} = o$,

worin die Werthe von r sind OP, Op;

daher $OP \cdot OP = \frac{-b'^2 (\delta^2 - a'^2)}{a'^2p^2 + b'^2q'^2}$.

Auf gleiche Weise

wenn $OQ = r'$, $\frac{\sin r', x}{\sin x, y} = p'$, und $\frac{\sin r', y}{\sin x, y} = q'$,

$$OQ \cdot Oq = \frac{-b'^2 (\delta^2 - a'^2)}{a'^2p'^2 + b'^2q'^2};$$

daher $OP \cdot Op : OQ \cdot Oq = a'^2p'^2 + b'^2q'^2 : a'^2p^2 + b'^2q^2$,

welches ein constantes Verhältniß ist, wie zu beweisen war.

Zweiter Abschnitt.

Über die Eigenschaften conjugirter Diameter.

§. 142. Wenn ein Diameter durch einen gegebenen Punkt (x′, y′) gezogen ist, die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem der conjugirte Diameter die Ellipse trifft. (Fig. 47.)

Es seien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, so ist, da die Gleichung für CD ist

$$y = \frac{y'}{x'} x \ldots\ldots\ldots (1),$$

die Gleichung für CD (§. 130.)

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x \ldots\ldots (2),$$

daher werden die Coordinaten des Punktes D, in welchen CD die Ellipse schneidet, bestimmt werden können, wenn man (2) mit folgender Gleichung combinirt,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ldots. (3)$$

hieraus hat man, wenn man in (3) den Werth von y aus (2) substituirt

$$\left\{a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{x'^2}{y'^2} + b^2\right\} x^2 = a^2b^2,$$

oder wenn man mit b^2 dividirt,

$$\left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'^2}{y'^2} + 1\right) x^2 = a^2;$$

d. h. $$(b^2x'^2 + a^2y'^2)\, x^2 = a^4y'^2;$$

d. h. $$a^2b^2x^2 = a^4y'^2;$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2.$$

Oder $$x = \pm \frac{a}{b} y',$$

daher auch $$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x$$

$$= \mp \frac{b}{a} \cdot x',$$

so daß die Zeichen von x und y verschieden sind, wie auch sein muß.

§. 143. Die Summe der Quadrate irgend zweier halber conjugirter Diameter ist gleich der Summe der Quadrate der halben Axen. (Fig. 47.)

Es seien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, bezeichnet beziehungsweise mit a', b', dann ist

$$a'^2 = CM^2 + MP^2 = x'^2 + y'^2,$$

$$b'^2 = CN^2 + ND^2 = \frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2$$

daher $a'^2 + b'^2 = \left(x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2\right) + \left(y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2\right)$

$$= \frac{b^2x'^2 + a^2y'^2}{b^2} + \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{a^2}$$

$$= a^2 + b^2.$$

§. 144. Wenn an den Scheiteln irgend zweier conjugirter Diameter Tangenten gezogen werden so, daß sie ein Parallelogram bilden, so ist die Fläche aller solcher Parallelogramme eine constante Größe. (Fig. 48.)

Es seien Pp, Dd, irgend zwei conjugirte Diameter, verlängert man nun die Tangenten an P und p, D und d, bis sie sich treffen, so ist klar (130), daß sie ein Parallelogram bilden werden.

Von P und T ziehe die Senkrechten PF, TQ auf die verlängerte DC.

Dann ist die Fläche des ganzen Parallelogrammes gleich der vierfachen Fläche des Parallelogrammes PD.

$$= 4\,PC \cdot CD \cdot \sin PCD.$$

$$= 4\,CD \cdot PF \,\ldots\ldots\ldots\, (1);$$

aber $PF = TQ = CT \cdot \sin TCQ = \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{ND}{DC}$ (104)

d. h. $PF \cdot CD = \frac{a^2}{x'} \cdot ND$

$$= \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{b}{a}\,x' \text{ (142)}$$

$$= ab \ldots\ldots (2).$$

Dies also in (1) substituirt, giebt die Fläche des ganzen Parallelogrammes $= 4ab$, und ist daher eine constante Größe.

§. 145. Zusatz 1. Nach der Gleichung (2) ist $PF \cdot CD = ab$; aber $CD = b'$, und $PF = PC \sin PCD = a' \sin \gamma$, wenn $\gamma = PCD$;

daher $ab = a'b' \sin \gamma$.

§. 146. Zusatz 2. Hieraus kann der Werth von PF gefunden werden, denn

$$PF = \frac{ab}{CD},$$

aber $CD^2 = a^2 + b^2 - a'^2$ (143)

daher $$PF = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - a'^2}}.$$

§. 147. Die Größe und Lage zweier gleicher conjugirter Durchmesser zu finden.

Allgemein ist $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.

Es sei $a' = b'$;

d. h. $2a'^2 = a^2 + b^2$;

also $$a' = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \ldots\ldots (1).$$

Hieraus ist die Größe dergleichen conjugirter Diameter gefunden.

Nun soll ihre Lage bestimmt werden.

Denn $ab = a'b' \sin \gamma$

$= a'^2 \sin \gamma$, wenn $a' = b'$;

d. h. $$\sin \gamma = \frac{ab}{a'^2}$$

$$= \frac{2ab}{a^2 + b^2} \ldots\ldots (2),$$

welches ihre gegenseitige Neigung ist. Auch kann ihre Neigung zur großen Axe gefunden werden, weil, da sie gleich sind, sie auch symmetrisch in Bezug auf die große Axe liegen, und deshalb gleiche Neigung zu derselben haben; aber im Allgemeinen (§. 128.)

$$\text{tang PCA} \cdot \text{tang DCA} = -\frac{b^2}{a^2} \text{ (Fig. 47.)}$$

oder $$\text{tang PCA} \cdot \text{tang DCa} = \frac{b^2}{a^2} = \text{tang}^2 \text{ PCA};$$

d. h. $$\text{tang PCA} = \pm \frac{b}{a} \ldots\ldots (3),$$

woraus folgt, daß die gleichen conjugirten Diameter den Linien BA und Ba parallel sind.

§. 148. Von allen Systemen conjugirter Durchmesser bilden diejenigen, welche gleich sind, den größten Winkel. (Fig. 48.)

Denn allgemein ist $\sin \gamma = \frac{ab}{a'b'}$ (145.)

Daher ist der Winkel PCd ein Minimum, oder PCD ein Maximum, wenn das Product a'b' ein Maximum ist; d. h. wenn $a' = b'$ ist, wie zu beweisen war.

§. 49. Zusatz. Hieraus kann bewiesen werden, daß von allen Systemen conjugirter Diameter die Summe derer, welche rechtwinklicht sind, am kleinsten, und die Summe derer, welche gleich sind, am größesten ist.

Denn $a' + b' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b')}$

$$= \sqrt{\left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin \gamma}\right)} \text{: deshalb}$$

(1) ist $a' + b'$ ein Maximum, wenn $\sin\gamma$ ein Minimum ist, d. h. wenn $a' = b'$: und

(2) $a' + b'$ ist ein Minimum, wenn $\sin\gamma$ ein Maximum ist, d. h., wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$, oder die conjugirten Diameter rechtwinklicht sind.

§. 150. Das Rechteck aus den Focal-Abständen irgend eines Punktes ist gleich dem Quadrate des correspondirenden halben conjugirten Diameters. (Fig. 49.)

Es sei P irgend ein Punkt (x, y), CD der halbe conjugirte Diameter zu CP; verbinde PS und PH; zu beweisen also, daß

$$SP \cdot HP = CD^2.$$

Allgemein ist $CD^2 = a^2 + b^2 - CP^2$ (143).

$$= a^2 + b^2 - (x^2 + y^2),$$

$$= a^2 + b^2 - x^2 - (1 - e^2)(a^2 - x^2)$$

$$= a^2 + b^2 - x^2 - a^2 + x^2 + e^2a^2 - e^2x^2$$

$$= b^2 + a^2e^2 - e^2x^2$$

$$= a^2 - e^2x^2 \;\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

(§. 91.)

Aber $a^2 - e^2x^2 = (a - ex)(a + ex)$

$= SP \cdot HP.$ (§. 112.)

Daher $SP \cdot HP = CD^2.$

§. 151. Es seien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, und eine Tangente an P treffe die Axen der Ellipse in T und t, zu beweisen, daß $PT \cdot Pt = CD^2$. (Fig. 50.)

Wenn CP und CD als die Coordinaten Axen angenommen werden, dann sind die Gleichungen für CA, CB (§. 136.) beziehungsweise

$$y = \alpha x$$

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2 \alpha} x$$

Es sei $x = a'$, oder CP, dann wird in den ersten

$$y \text{ oder } PT = \alpha a'; \text{ und}$$

$$y \text{ oder } Pt = -\frac{b'^2}{a'\alpha} \text{ in der zweiten,}$$

daher $$PT \cdot PT = -b'^2 = CD^2.$$

Das Produkt $PT \cdot Pt$ ist negativ, weil PT und Pt an entgegengesetzen Seiten der Axe liegend verschiedene Zeichen haben.

§. 152. Zusatz. Genau auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, daß wenn die Tangente an P irgend zwei conjugirte Diameter in T und t trifft, ist

$$PT \cdot Pt = CD^2.$$

§. 153. Wenn eine Tangente an irgend einem Punkte P, die Tangenten an den Scheiteln der großen Axe in T und t trifft, zu beweisen, daß (Fig. 51.)

$$AT \cdot at = BC^2.$$

Die Gleichung der Tangente an P (x', y') ist

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$$

Es sei $$x = a = CA$$

dann ist $$a^2yy' = b^2a\,(a - x');$$

d. h. $$y \text{ oder } AT = \frac{b^2}{ay'}(a - x');$$

Auf gleiche Weise, wenn $x = -a = Ca$, so ist

$$y \text{ oder } at = \frac{b^2}{ay'}(a + x');$$

daher $$AT \cdot at = \frac{b^4}{a^2y'^2}(a^2 - x'^2) \ldots. (1).$$

Aber $$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2),$$

oder $$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - x'^2}{y'^2};$$

daher durch Substitution in (1),

$$AT \cdot At = b^2 = BC^2.$$

§. 154. Genau auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, daß wenn $P'p'$, $D'd'$ zwei was immer für conjugirte Diameter sind, und die Tangente an P trifft die an den Scheiteln der ersteren gezogenen Tangenten in T und t, immer ist

$$P'T, p't = CD^2.$$

Dritter Abschnitt.

Von Supplementar-Sehnen.

Erklärung. Wenn von den Scheiteln irgend eines Diameters zwei gerade Linien nach irgend einem Punkte in der Ellipse gezogen werden, so heißen sie Supplementar-Sehnen.

Die Sehnen von den Scheiteln der großen Axe gezogen heißen Haupt-Supplementar-Sehnen.

§. 155. Wenn irgend zwei Supplementar-Sehnen gezogen sind, und die Gleichung der einen gegeben ist, die Gleichung der andern zu finden. (Fig. 52.)

Wird die Ellipse auf irgend zwei conjugirte Diameter bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \ldots\ldots (1).$$

Durch irgend einen Punkt P (x', y') ziehe den Diameter Pp, und PQ, Qp seien irgend ein Paar Supplementar-Sehnen; da nun die Gleichung für PQ ist

$$y - y' = \alpha\,(x - x') \ldots\ldots (2),$$

so ist nun erforderlich, die Gleichung für pQ zu finden.

Da die Coordinaten von P, x', y' sind, so sind die für p, — x', — y', daher wird die Gleichung für pQ (§. 14.) von dieser Form sein:

$$y + y' = \alpha'\,(x + x') \ldots\ldots (3),$$

worin α' zu finden ist.

Da die Linien, deren Gleichungen (2) und (3) sind, sich in Q schneiden, so sind die Coordinaten für diesen Punkt in beiden Gleichungen dieselben; multiplicirt man sie also in einander, so hat man

$$y^2 - y'^2 = \alpha\alpha'\,(x^2 - x'^2);$$

d. h. $$\alpha\alpha' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} \ldots\ldots (4)$$

da aber x' und y' die Coordinaten von P, einem Punkte in der Ellipse sind, so müssen sie der Gleichung (1) genügen;

daher $$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2.$$

Dies von (1) abgezogen, erhält man

$$a'^2\,(y^2 - y'^2) + b'^2\,(x^2 - x'^2) = o;$$

d. h. $$\frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

daher

daher durch Substitution in (4)

$$\alpha\alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2}; \text{ d. h. } \alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2\alpha},$$

und die Gleichung für pQ wird durch Substitution

$$y + y' = -\frac{b'^2}{a'^2\alpha}(x + x').$$

§. 156. Zusatz. Es falle Pp mit der großen Axe Aa zusammen, so wird die Gleichung für aQ gezogen durch den Punkt (— a, o) sein

$$y = \alpha (x + a),$$

und deshalb die Gleichung AQ gezogen durch den Punkt A (+ a, o)

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2\alpha}(x - a).$$

§. 157. Wenn zwei Diameter zu irgend zwei Supplementar-Sehnen parallel gezogen werden, so sind sie conjugirte Diameter.

Da die Gleichungen der beiden Supplementar-Sehnen sind

$$y - y' = \alpha (x - x') \ldots\ldots (1),$$

und $$y + y' = -\frac{b'^2}{a'^2\alpha}(x + x') \ldots\ldots (2),$$

so ziehe einen Diameter parallel zu (1), so ist seine Gleichung

$$y = \alpha x;$$

deshalb, da die Gleichung für den conjugirten Diameter (§. 129.) ist

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2\alpha} x$$

so folgt, daß dieser letztere parallel zu (2) ist, wie zu beweisen war.

§. 158. Zusatz 1. Hiernach kann ein Diameter gezogen werden, welcher einem gegebenen Diameter conjugirt ist. (Fig. 53.)

Es sei Pp der gegebene Diameter, und

(1) die große Axe der Ellipse sei gegeben.

Von a ziehe aR parallel zu Pp, und verbinde R, A; wird dann Dd durch C parallel zu RA gezogen, so ist dies der conjugirte Diameter zu Pp.

(2) Die große Axe sei unbekannt.

Ziehe einen beliebigen Diameter Rr; durch r ziehe rQ parallel zu Pp, verbinde Q, R; wird dann Dd durch C parallel zu RQ gezogen, so ist dies der conjugirte Diameter zu Pp.

Diese Schlüsse sind an sich klar.

§. 159. Zusatz 2. Hieraus auch kann eine sehr einfache Methode abgeleitet werden, an einen in der Ellipse gegebenen Punkt eine Tangente zu ziehn.

Es sei P der gegebene Punkt, und

(1) die große Axe sei gegeben.

Ziehe PC und die Sehne aQ damit parallel, verbinde Q, A; wird dann PT zu QA parallel gezogen, so berührt es die Ellipse in P.

(2) Die große Axe sei unbekannt.

Ziehe einen beliebigen Diameter RCr, verbinde P, C; ziehe r Q parallel zu PC, und verbinde QR; wird dann PT parallel zu QR gezogen, so wird dies eine Tangente in P sein.

§. 160. Den Winkel, welchen die Haupt-Supplementar-Sehnen bilden, zu finden. (Fig. 54.)

Es sei der Punkt Q (x′, y′) der Durchschnitt der beiden Sehnen AQ, aQ, und nimm an, die Ellipse sei auf ihre Axen bezogen.

Die Gleichungen für Qa, QA sind nun (§. 156.)

$$y = \alpha\,(x + a)$$
$$y = \alpha'\,(x - a)$$

$$\text{tang AQa} = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'}\ (21)$$

$$= \frac{\alpha' - \alpha}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \;\ldots\ldots\ (1)$$

$$\text{da } a' = -\frac{b^2}{a^2\alpha}.$$

Nun ist $\alpha' = \text{tang QAX} = -\text{tang QAa} = -\frac{y'}{a - x'}$

und $\alpha = \text{tang QaX} \;\ldots\ldots\ldots = \frac{y'}{a + x'}$

daher $\alpha' - \alpha = -y'\left(\frac{1}{a - x'} + \frac{1}{a - x'}\right)$

$$= -\frac{y'}{a^2 - x'^2}\cdot 2a,$$

$$= -\frac{2ab^2}{a^2 y'};$$

daher durch Substitution in (1)

$$\text{tang AQa} = -\frac{2ab^2}{y'(a^2 - b^2)}.$$

§. 161. Zusatz 1. Da das Zeichen dieser Größe negativ ist, so ist der Winkel immer stumpf; deshalb also auch der Winkel den conjugirte Diameter bilden, stumpf ist.

§. 162. Zusatz 2. Der Winkel AQa ist der möglichst größte, wenn y' so ist, d. h. wenn $y' = b$, oder wenn der Punkt Q mit B dem Scheitel der kleinen Axe zusammen fällt. In diesem Punkte sind die Hauptsupplementar-Sehnen gleich und ihre Neigung zu der größern Axe ist

$$= \overset{-1}{\text{tang}} \frac{b}{a}.\text{*)}$$

§. 163. Zusatz 3. Hieraus folgt, daß die conjugirten Diameter, die diesen Sehnen parallel sind, ebenfalls gleich sind, und den möglichst größten Winkel bilden. (Siehe §. 147.)

§. 164. Zwei conjugirte Diameter zu ziehn, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden.

Indem die Ellipse auf ihre Axen bezogen wird, bezeichne 2a', 2b' die gesuchten conjugirten Diameter, und γ das Supplement des Winkels, unter welchem sie gegen einander geneigt sind.

Da nun (§§. 143. und 145.)

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

und

$$a'b' = \frac{ab}{\sin\gamma} \;\ldots\ldots\; (2),$$

so hat man, indem man die zweite zweimal zu den ersten addirt

$$a'^2 + b'^2 + 2a'b' = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\gamma},$$

---

*) Unter diesem Ausdrucke ist zu verstehen der Winkel, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist.

daher wenn die Wurzel ausgezogen wird

$$a' + b' = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\gamma}}.$$

Auf gleiche Weise

$$a' - b' = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin\gamma}},$$

daher durch Addition, und dann durch Subtraction,

$$a' = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\gamma}}$$
$$\pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin\gamma}}.$$

$$b' = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\gamma}}$$
$$\mp \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin\gamma}};$$

wodurch die Größe der gesuchten Diameter bestimmt ist. Nun, da PCA = DCA — DCP (Fig. 47.),

$$\text{tang PCA} = \frac{\text{tang DCA} - \text{tang DCP}}{1 + \text{tang DCA} \cdot \text{tang DCP}},$$

oder indem man die bereits gebrauchte Bezeichnung beibehält

$$\alpha = \frac{\alpha' + \text{tang}\,\gamma}{1 - \alpha'\,\text{tang}\,\gamma};$$

aber $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$; d. h. $\alpha' = -\frac{b^2}{a^2\alpha}$;

und durch Substitution

$$\alpha = \frac{-\frac{b^2}{a^2\alpha} + \text{tang}\,\gamma}{1 + \frac{b^2}{a^2\alpha}\,\text{tang}\,\gamma};$$

d. h. $\alpha^2 - \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \gamma \cdot \alpha = - \frac{b^2}{a^2} - \alpha \operatorname{tang} \gamma,$

oder $\alpha^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \operatorname{tang} \gamma \cdot \alpha = - \frac{b^2}{a^3};$

d. h. $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} \operatorname{tang} \gamma \pm \frac{1}{2a^2}$

$$\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \operatorname{tang} \gamma^3 - 4a^2b^2},$$

deshalb ist also auch die Lage des Diameters bestimmt.

Die Aufgabe würde unmöglich sein, wenn

$$\operatorname{tang}^2\gamma < \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}$$

$$\text{oder } \operatorname{tang} \gamma < \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Da aber γ ein spitzer Winkel ist, so wird er ein Minimum sein, wenn die Diameter gleich sind (147), und in diesem Falle

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

daher nun, da tang γ niemals kleiner als $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ sein kann, so ist die Aufgabe immer möglich.

Dieselbe Aufgabe gestattet folgende geometrische Auflösung. (Fig. 55.)

Ziehe einen beliebigen Diameter Rr, und über ihm beschreibe einen Kreisabschnitt, welcher einen, dem gegebenen gleichen Winkel faßt, und die Ellipse in Q schneidet. Ziehe QR, Qr; und diesen parallel ziehe die Diameter Pp, Dd; dies sind die gesuchten Diameter.

Denn indem sie parallel zu den Supplementar-Sehnen QR, Qr sind, sind sie conjugirte Diameter (157.) und der Winkel

$$PCD = RQr,$$

und daher gleich dem Gegebenen.

Die Aufgabe läßt eine zweite Auflösung zu, (Fig. 56.): denn der Kreis wird die Ellipse noch einmal schneiden in irgend einem Punkte Q′; ziehe daher die Supplementar-Sehnen Q′R, Q′r; wird dann P′p und D′d durch den Mittelpunkt parallel zu Q′R, Q′r gezogen, so sind dies die gesuchten Diameter.

Denn sie sind offenbar conjugirte Diameter und

$$P'CD' = \pi - RQ'r,$$

daher dem gegebenen Winkel gleich.

Viertes Kapitel.

Vermischte Sätze.

§. 165. **Wenn eine Ellipse auf einer Ebene gezeichnet ist, ihren Mittelpunkt und die Axe zu finden.**

(1) **Den Mittelpunkt zu finden.** (Fig. 57.) Ziehe zwei beliebige parallele Sehnen MN, PQ und halbire sie in den Punkten m, p; verbinde m, p und verlängere diese Linie, bis sie die Ellipse in R, r trifft; da nun mp durch die Mittelpunkte zweier paralleler Sehnen geht, so ist es ein Diameter (124.), und daher C, der Mittelpunkt von Rr, ist der gesuchte Mittelpunkt.

(2) **Die Axe zu finden.** (Fig. 58.)

Nimm einen Punkt P in der Ellipse, und von dem Punkte C, der eben gefunden ist, als Mittelpunkt, beschreibe mit CP einen Kreis, der die Ellipse in p schneide,

ziehe Pp, halbire es und in dem Halbirungspunkte errichte die Senkrechte ACa, die die Ellipse in A und a trifft; dann ist ACa die große Axe: die kleinere wird erhalten, wenn man BCb rechtwinklicht zu Aa zieht.

§. 166. Den Ort des Endpunktes einer geraden Linie zu finden, welche sich auf zweien, zu einander rechtwinklichten Linien so bewegt, daß der Theil dieser Linie, welcher zwischen den beiden Senkrechten liegt, immer von derselben gegebenen Länge bleibt. (Fig. 59.)

AX, AY seien die gegebenen Linien, QRP irgend eine Lage der Linie, von derem Endpunkte man den Ort sucht.

Nimm AX, AY als Coordinaten Axen, ziehe die Senkrechte PM auf AX, und verlängere sie, bis sie in N die Parallele zu AX, welche aus Q gezogen ist, trifft.

Es sei AM = x, MP = y, QP = a, PR = b.

Dann ist $QP^2 = QN^2 + NP^2 \ldots\ldots (1)$;

aber $QN = AM = x$,

und $NP = \frac{QP}{RQ} \cdot MP = \frac{a}{b} y$.

Daher durch Substitution in (1)

$$a^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

oder $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

welches die Gleichung der Ellipse ist.

Daher ist der Ort von P eine Ellipse, deren Mittelpunkt A, und deren Axen 2a und 2b sind.

§. 167. Zusatz 1. Auf eine, der vorstehenden, genau ähnliche Weise kann bewiesen werden, daß wenn die Linien AX und AY unter einander geneigt sind, un=

ter dem Winkel ϑ, die Gleichung des Ortes von P sein wird

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2ab \cos \vartheta \cdot xy - a^2b^2 = 0,$$

welche eine Ellipse, bezogen auf beliebige Diameter, vorstellt *).

§. 168. Zusatz 2. Hieraus kann eine leichte praktische Methode abgeleitet werden, eine Ellipse zu beschreiben durch Hülfe eines Instrumentes, welches Ellipsograph (Ellipsen-Zirkel) heißt. (Fig. 60.)

Es sei QP gleich der halben großen Axe, und NP gleich der halben kleinen Axe; bewege nun die Linie QNP herum, so daß die Punkte QN fortwährend auf der Coordinaten Axen bleiben, so wird der Punkt P eine Ellipse beschreiben, wie klar ist aus der vorstehenden Untersuchung.

§. 169. In der großen Axe Aa einer Ellipse einen Punkt O zu finden so, daß, wenn eine beliebige Sehne POp durch denselben gezogen wird, der Winkel PAp ein rechter sei. (Fig. 31.)

Wie bei der Parabel (§. 87.) können die Coordinaten von P und p bestimmt werden, wenn man y aus diesen beiden Gleichungen

$$y = \alpha x, \quad y = -\frac{1}{\alpha} x,$$

und der Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

---

*) Hamilton's analytische Geometrie (§§. 89. und 91.)

eliminirt. Man erhält alsdann, wenn man dieselbe Bezeichnung anwendet, wie in dem angezogenen Paragraphen,

$$x' = \frac{2b^2a}{a^2\alpha^2 + b^2}, \quad y' = \frac{2b^2a\alpha}{a^2\alpha^2 + b^2},$$

$$x'' = \frac{2b^2a\alpha^2}{a^2 + b^2\alpha^2}, \quad y'' = -\frac{2b^2a\alpha}{a^2 + b^2\alpha^2};$$

bezeichnet man nun $2b^2a$ mit C, und die Nenner der ersten und zweiten Reihe beziehungsweise mit m und n, so hat man für Pp folgende Gleichung:

$$y - \frac{c\alpha}{m} = \frac{-\frac{c\alpha}{n} - \frac{c\alpha}{m}}{\frac{c\alpha^2}{n} - \frac{c}{m}} \left(x - \frac{c}{m}\right)$$

$$= -\alpha \cdot \frac{m + n}{\alpha^2 m - m} \left(x - \frac{c}{m}\right).$$

Es schneide Pp die Axe z. B. in O, dann ist $y = o$, und

$$x - \frac{c}{m} = \frac{c}{m} \cdot \frac{\alpha^2 m - n}{m + n};$$

daher $$x = c\,\frac{\alpha^2 + 1}{m + n}.$$

Aber $m + n = a^2\alpha^2 + b^2 + a^2 + b^2\alpha^2$

$$= (a^2 + b^2)(\alpha^2 + 1);$$

daher x oder $AO = \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{2b^2a}{a^2 + b^2}.$

§. 170. Tangenten-Paare an eine Ellipse gezogen, sollen sich beständig unter rechten Winkeln schneiden; den Ort der Durchschnittspunkte zu finden.

Wenn die gerade Linie

$$y = \alpha x + \beta \;\ldots\ldots\; (2)$$

so gezogen wird, daß sie die Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

schneidet, so erhält man die Ordinaten der beiden Durchschnittspunkte aus der Gleichung

$$(a^2\alpha^2 + b^2)y^2 - 2b^2\beta y + b^2(\beta^2 - a^2\alpha^2). \text{ (§. 101.)}$$

Man nehme nun an, die Sekante gehe über in die Tangente, so sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung gleich, und die Gleichung, die nun ein vollkomenes Quadrat ist, giebt,

$$4(a^2\alpha^2 + b^2)\,b^2(\beta^2 - a^2\alpha^2) = 4b^4\beta^2, \text{ (§. 88.)}$$

oder $(a^2\alpha^2 + b^2)(\beta^2 - a^2\alpha^2) = b^2\beta^2$;

d. h. $a^2\alpha^2\beta^2 - a^4\alpha^4 - b^2a^2\alpha^2 = o$;

d. h. $a^2\alpha^2 + b^2 = \beta^2 = (y - \alpha x)^2$ aus (1)

$$= y^2 - 2xy\alpha + \alpha^2x^2;$$

also $(a^2 - x^2)\alpha^2 + 2xy \cdot \alpha + b^2 - y^2 = o$,

oder $$\alpha^2 + \frac{2xy}{a^2 - x^2}\alpha + \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = o.$$

Man nehme an, α', α'' seien die Wurzeln dieser Gleichung, so bezeichnen sie die trigonometrischen Tangenten des Winkels, welchen die Tangenten der Ellipse mit der Axe der x bilden, und nach der Theorie der Gleichungen ist

$$\alpha'\alpha'' = \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2};$$

aber nach der Annahme schneiden sich die Tangenten unter rechten Winkeln

daher $$\alpha'\alpha'' = -1,$$

hieraus $$\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1,$$

d. h. $$b^2 - y^2 = - a^2 + x^2;$$

oder $$y^2 + x^2 = a^2 + b^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist.

Hiernach ist der gesuchte Ort ein Kreis, dessen Radius

$$= \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§. 171. Zusatz. Auf dieselbe Weise kann man den Ort des Durchschnittes von Tangenten-Paaren finden, die parallel sind zu conjugirten Diametern; mit andern Worten, den Ort der Scheitel aller der gleichen Parallelogramme, die um die Ellipse beschrieben sind *).

Denn in diesem Falle $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$;

d. h. $$\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -\frac{b^2}{a^2};$$

d. h. $a^2b^2 - a^2y^2 = - b^2a^2 + b^2x^2$;

d. h. $a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2$,

welches die Gleichung einer Ellipse ist.

Hiernach ist der gesuchte Ort eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem der ursprünglichen zusammen fällt, und deren Axen man so finden kann;

---

*) Von allen Parallelogrammen, die um eine Ellipse beschrieben sind, sind nur die von gleicher Fläche, die ihre Seiten parallel zu einem Systeme conjugirter Durchmesser haben.

Es sei $x = o$; dann $a^2y^2 = 2a^2b^2$

d. h. $y = b\sqrt{2}$ = der halben kleinen Axe; und auf gleiche Weise

$x = a\sqrt{2}$ = der halben großen Axe.

Von der Hyperbel.

Erstes Kapitel.

Von der Hyperbel, auf ihre Axen bezogen.

§. 172. Die Gleichung der Hyperbel zu finden. (Fig. 61.)

Die Hyperbel ist der Ort eines Punktes, dessen Abstand vom Focus beständig in einem gegebenen Verhältnisse größer ist, als dessen Entfernung von der Directrix.

Es sei S der Focus, Kk die Directrix, P irgend ein Punkt in der Hyperbel, durch S ziehe die unbegränzte Linie ESX senkrecht auf Kk, von P ziehe die Senkrechten PM, PQ auf AX und Kk, und verbinde PS.

Es sei das gegebene Verhältniß $PS : PQ = e : 1$, so daß $e > 1$ ist; wird dann SE in A so getheilt, daß $SA : AE = e : 1$, so wird A ein Punkt in der Hyperbel sein.

Von A ziehe AY rechtwinklicht zu AX, und nimm AX und AY als die Coordinaten Axen.

Es sei AM = x, MP = y, AS = m;
dann ist $SP^2 = PM^2 + MS^2 = y^2 + (x - m)^2$ .... (1)

aber $SP^2 = e^2 \cdot PQ^2 = e^2 (AE + AM)^2$

$$= e^2 \left(\frac{m}{e} + x\right)^2 \text{ .... (2)}$$

daher (1) und (2) gleich gesetzt,

$$y^2 + (x - m)^2 = m^2 + 2mex + e^2x^2;$$

d. h. $y^2 = 2m(1 + e)x + (e^2 - 1)x^2$

$$= (e^2 - 1)\left(\frac{2m}{e - 1} x + x^2\right)$$

oder wenn $\frac{m}{e - 1} = a$ angenommen wird.

$$y^2 = (e^2 - 1)(2ax + x^2),$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 173. Zusatz 1. In XA nimm $Aa = \frac{2m}{e - 1}$, halbire Aa in C, so ist in diesem Punkte $x = - a$;

d. h. $y^2 = -(e^2 - 1)a^2$

d. h. $y = \pm a \sqrt{-1} \cdot \sqrt{e^2 - 1}$,

welches immer imaginair ist, da $e > 1$.

Wenn daher BCb rechtwinklicht auf Aa im Punkte C gezogen wird und sowohl CB, als auch Cb = $a \sqrt{e^2 - 1}$ genommen wird, so sind die Punkte BSb nicht Punkte in der Hyperbel.

§. 174. Zusatz 2. Bezeichne BC durch b, so ist

$$b = \pm a \sqrt{e^2 - 1};$$

d. h $\sqrt{e^2 - 1} = \pm \frac{b}{a}$;

deshalb wird durch Substitution die obige Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax + x^2}.$$

Erklärung. Die geraden Linien Aa, Bb, bezeichnet mit 2a und 2b, beziehungsweise, heißen die Quer-Axe, und die conjugirte Axe; die Punkte A, a, in welchen die erstere die Hyperbel trifft, heißen die Scheitel; und der Punkt C, in welchem sich die Axen schneiden, heißt der Mittelpunkt.

§. 185. Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Coordinaten vom Mittelpunkte genommen werden. (Fig. 61.)

Es sei P irgend ein Punkt in der Hyperbel, ziehe die Senkrechte PM auf Aa, und CM = x'.

Nun ist die Gleichung der Hyperbel, wenn die Coordinaten in A anfangen,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Aber $$x = AM = CM - CA$$
$$= x' - a.$$

Substituirt man diesen Werth von x, so hat man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a(x' - a) + (x' - a)^2\right\}$$
$$= \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2) \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 176. Zusatz 1. Läßt man den Accent weg, der nur angewandt wurde, um die neue von der alten Ab-

Abscisse zu unterscheiden, so hat man durch Multiplication und Versetzung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \ldots\ldots (3),$$

und dividirt man jedes Glied durch a^2b^2, so hat man

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = - 1 \ldots\ldots (4).$$

Von den drei letzten Formen der Gleichung für die Hyperbel ist die mit (3) bezeichnete die gebräuchlichste.

§. 177. Zusatz 2. Diese Gleichungen in geometrische Sprache übertragen, drücken eine Eigenschaft der Hyperbel aus.

Denn wenn (Fig. 61.) P irgend ein Punkt ist, so hat man

$$2ax + x^2 = x\,(2a + x) = MA \cdot Ma,$$

und $x'^2 - a^2 = (x' - a)\,(x' + a) = MA \cdot Ma$;

daher $MP^2 = \frac{BC^2}{CA^2} \cdot AM \cdot Ma$,

oder $AM \cdot Ma : MP^2 = AC^2 : BC^2$,

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten der Quer-Axe verhält sich zu dem Quadrat der Ordinate, wie das Quadrat der halben Quer-Axe zum Quadrate der halben conjugirten Axe.

§. 178. Zusatz 3. Es sei $a = b$, dann werden Gleichung (1) und (2)

$$y^2 = 2ax + x^2$$
$$y^2 = x^2 - a^2.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Hyperbel heißt die Gleichseitige, oder Rechtwinklichte, und ist in Beziehung auf die gemeine Hyperbel das, was der Kreis gegen die Ellipse ist.

§. 179. Zusatz 4. Vergleicht man die Gleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

mit der der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

so ist klar, daß um von der einen Kurve zu der andern überzugehn, man nur $+ b^2$ in $- b^2$, oder b in $b\sqrt{-1}$ zu verwandeln braucht.

§. 180. Aus der Gleichung der Hyperbel ihre Gestalt zu bestimmen.

Nimmt man die Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2,$$

so hat man entweder

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \;\ldots\ldots (1)$$

oder $$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \;\ldots\ldots (2).$$

(1) In Gleichung (1) setze $x = o$,
dann ist $y = \pm b\sqrt{-1} = CB$ oder Cb (Fig. 61.)

Setze $y = o$,
dann ist $x = \pm a = CA$ oder Ca.

Setze $x < \pm a$
dann werden die Werthe von y imaginair; deshalb liegt kein Punkt der Hyperbel zwischen A und a.

Setze $x = \pm a$
dann $y = \pm o$,
d. h. die Hyperbel schneidet die Axe XX' in den Punkten A, a.

Setze $x > \pm a$,
dann giebt es für jeden Werth von x, zwei gleiche Werthe für y, mit entgegengesetzten Zeichen.

Wenn x wächst, wachsen die Werthe von y; und wenn x unendlich groß wird, werden die Werthe von y eben so.

Die Hyperbel also besteht aus zwei entgegengesetzten Armen, die sich unbegränzt an den Rechten von A und an der Linken von a erstrecken, und in Bezug auf die Axe XAX′ eine symmetrische Lage haben.

(2) Die Discussion der Gleichung (2) würde zu demselben Resultate führen.

§. 181. Zusatz 1. Die Entfernung des Mittelpunktes vom Focus ist, (Fig. 61.)

$$= CS = CA + AS$$
$$= a + a\,(e-1) = ae$$

Diese Größe heißt die Eccentricität der Hyperbel.

§. 182. Zusatz 2. Den Werth der Ordinate, die durch den Focus geht, zu finden.

Wenn die Ordinate durch den Focus geht, ist

$$x = ae;$$

daher
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2e^2 - a^2)$$
$$= b^2\,(e^2 - 1)$$
$$= \frac{b^4}{a^2};$$

daher
$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} = SL \text{ oder } Sl \text{ (Fig. 61.)}$$

Die Doppelordinate Ll, die durch den Focus geht, heißt der Hauptparameter, oder latus rectum.

§. 183. Zusatz 3. Fig. 62. In der Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -\,a^2b^2$$

verwandle x in y, und y in x; mit andern Worten: nimm die Abscissen nun auf CY, und die Ordinaten auf CX; (§. 99.) man hat dann

$$a^2x^2 - b^2y^2 = - a^2b^2,$$

welches dieselbe Hyperbel, wie vorher darstellt, aber verschieden der Lage nach.

Es sei $x = o$; so ist $y = \pm a$

$y = o$; giebt $x = \pm b\sqrt{-1}$,

deshalb ist nun Bb die Quer-Axe, und die conjugirte Axe ist Aa.

Diese Hyperbel heißt, in Beziehung auf die erste, die **conjugirte Hyperbel.**

§. 184. **Wenn die Quer-Axe als unendlich groß angenommen wird, geht die Hyperbel in die Parabel über.**

Die Gleichung der Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

$$= \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \;\ldots\ldots (1)$$

Nun ist $b^2 = e^2a^2 - a^2 \ldots.$ (§. 174.)

$$= (ea + a)(ea - a),$$

$$= (ea + a)\,AS;$$

daher $\frac{b^2}{a} = (e + 1)\,AS;$

daher durch Substitution in (1)

$$y^2 = 2AS\,(e + 1)\,x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \ldots.(2)$$

Man nehme nun a unendlich groß, dann ist $\frac{b^2}{a^2} = o$,

und da $a = \frac{m}{e-1}$, so hat man $e - 1 = o$, oder $e = 1$; deshalb durch Substitution in (2)

$$y^2 = 4AS \cdot x,$$

welches die Gleichung der Parabel ist, woraus die Wahrheit des Satzes folgt. (§. 100.)

§. 185. Den Durchschnitt einer geraden Linie mit der Hyperbel zu finden.

Es sei die Gleichung der gegebenen Linie

$$y = \alpha x + \beta \text{ ....} \quad (1).$$

Alsdann wird man die Coordinaten des Durchschnittspunktes oder der Durchschnittspunkte erhalten, wenn man diese Gleichung mit der der Hyperbel combinirt,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \text{ .....} \quad (2).$$

Substituirt man nun in (2) den Werth von x aus (1), so hat man

$$a^2y^2 - \left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)^2 = - a^2b^2;$$

d. h. $(a^2\alpha^2 - b^2)\, y^2 + 2b^2\beta y - b^2\beta^2 = -a^2b^2\alpha^2;$

d. h. $y^2 + \dfrac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2 - b^2}\, y + \dfrac{b^2(a^2\alpha^2 - \beta^2)}{a^2\alpha^2 - b^2} = 0.$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man zwei Werthe für y, welche substituirt in (1) zwei correspondirende Werthe für x geben, daher können die gesuchten Coordinaten bestimmt werden.

Wenn die zwei Wurzeln dieser quadratischen Gleichung gleich sind, so fallen die Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt die Hyperbel; sind sie imaginair, so liegt die gerade Linie ganz außerhalb der Hyperbel.

Hieraus ergiebt sich, daß eine gerade Linie die Hyperbel in nicht mehr als zwei Punkten schneiden kann.

Erklärung. Der Theil der geraden Linie, der innerhalb der Hyperbel liegt, heißt Sehne; geht sie durch den Focus, so heißt sie Focal-Sehne.

§. 186. **Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche die Hyperbel in einem gegebenen Punkte berührt.**

Es seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, und x'', y'' die irgend eines andern Punktes, nahe dem erstern.

Dann ist die Gleichung der durch diese Punkte gezogenen Linie

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \;\ldots\ldots\; (1).$$

Da aber auch beide Punkte in der Hyperbel liegen, so hat man

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2,$$
$$a^2y''^2 - b^2x''^2 = - a^2b^2;$$

daher durch Subtraction

$$a^2(y''^2 - y'^2) = b^2(x''^2 - x'^2);$$

d. h.
$$\frac{(y'' + y')(y'' - y')}{(x'' + x')(y'' - x')} = \frac{b^2}{a^2}$$

d. h.
$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'}$$

daher wird durch Substitution Gleichung (1)

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'}(x - x').$$

Es falle nun der Punkt (x'', y'') mit (x', y') zusammen; dann ist $x'' = x'$, $y'' = y'$, und die Secante wird eine Tangente am Punkte (x', y'); daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}(x - x'),$$

in welcher x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes, und x, y die veränderlichen Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes in der Tangente sind.

§. 187. Zusatz. Diese Gleichung kann vereinfacht werden, denn multiplicirt man beide Seiten mit a^2y', so ist

$$a^2yy' - a^2y'^2 = b^2xx' - b^2x'^2$$

d. h. $$a^2yy' - b^2xx' = a^2y'^2 - b^2x'^2$$
$$= - a^2b^2,$$

welches die gebräuchlichste Gleichung ist.

Wenn $a = b$, so wird die Hyperbel gleichseitig, und die Gleichung der Tangente ist

$$yy' - xx' = - a^2.$$

§. 188. Den Durchschnitt der Tangente mit den Axen der x und y zu finden. (Fig. 63.)

Die Gleichung der Tangente ist

$$a^2yy' - b^2 xx' = - a^2b^2.$$

(1) Sie schneide die Axe der x z. B. in T.

Dann ist $y = o$; also $x = \frac{a^2}{x'}$,

oder $$CT = \frac{CA^2}{CM}.$$

(2) Sie schneide die Axe der y, z. B. in t.

Dann $x = o$; also $y = \frac{b^2}{y'}$,

oder $$Ct = \frac{CB^2}{Cm}.$$

Daraus folgt, daß jede halbe Axe eine mittlere Proportionale ist zwischen der Abscisse eines Punktes und dem Theile derselben, der zwischen dem Durchschnitt mit der Tangente, und dem Mittelpunkte liegt.

§. 189. Zusatz. Da $CT = \frac{a^2}{x'}$,

so ist
$$MT = CM - CT,$$
$$= x' - \frac{a^2}{x'}$$
$$= \frac{x'^2 - a^2}{x'}.$$

Erklärung. Die Linie MT zwischen dem Fuß der Ordinate und dem Punkte, wo die Tangente die Axe trifft, heißt die Subtangente.

Erklärung. Die gerade Linie im Berührungspunkte, senkrecht auf der Tangente, heißt Normale.

§. 190. Die Gleichung der Normale zu finden.

Es berühre PT (Fig. 63.) die Hyperbel in P, von diesem Punkte ziehe PG senkrecht auf PT.

Da nun PG durch den Punkt (x′, y′) senkrecht auf der Linie
$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x')$$
so ist die Gleichung der Senkrechten (19)
$$y - y' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} (x - x'),$$
in welcher x′, y′ die Coordinaten des Berührungspunktes und x, y die irgend eines Punktes in der Linie PG, als unbegränzt angesehn, sind.

§. 191. Den Durchschnitt der Normale mit den Axen von x und y zu finden. (Fig. 63.)

Die Gleichung der Normale ist
$$y - y' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} (x - x')$$

(1) die Normale schneide die Axe der x z. B. in G.

Dann ist $y = o$, und $- y' = - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} (x - x')$;

d. h. $$x - x' = \frac{b^2}{a^2} \cdot x' = MG.$$

(2) Sie schneide die Axe der y, z. B. in g. *)

Dann $x = o$; also $y - y' = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} x'$

$$= \frac{a^2}{b^2} y';$$

d. h. $$y = \frac{a^2 + b^2}{b^2} y'.$$

Erklärung. Die Linie MG zwischen dem Fuß der Ordinate, und dem Punkte, wo die Normale die Axe der x schneidet, heißt Subnormale.

Der Ausdruck Normale beschränkt sich gewöhnlich auf die begränzte Linie PG. (§. 58.)

§. 192. Eine Tangente an eine Hyperbel zu ziehn, von einem gegebenen Punkte (x'', y'') außerhalb derselben.

Es seien x', y' die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes. Da nun die Gleichung der Tangente allgemein ist

$$a^2yy' - b^2xx' = - a^2b^2,$$

und der Punkt (x'', y'') nach der Annahme ein Punkt in der Tangente ist, so hat man

$$a^2y'y'' - b^2x'x'' = - a^2b^2 \ldots\ldots (1);$$

*) Der Punkt g fehlt in der Figur.

auch, da der Berührungspunkt (x', y') in der Hyperbel liegt, ist

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2 \ldots\ldots (2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen also können die Coordinaten x', y' des Berührungspunktes bestimmt werden.

Da die Gleichung, die sich durch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grade ist, so folgt, daß es zwei Berührungspunkte giebt, mit andern Worten: daß von einem Punkte ausserhalb der Hyperbel zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden können.

Aber die Lage der Berührungspunkte kann direct gefunden werden, wie in §§. 41., 59. und 109., wenn man die Oerter der Gleichungen (1) und (2), in welchen x' und y' die Veränderlichen sind, construirt.

Nun ist der Ort von (2) die gegebene Hyperbel, und der Ort von (1) ist eine gerade Linie, deren Lage bestimmt wird, wenn man nach und nach x', $y' = o$ setzt.

Wenn daher in der Gleichung

$$a^2y''y' - b^2x''x' = - a^2b^2,$$

$$x' = o, \text{ so ist } y' = - \frac{b^2}{y''},$$

$$y' = o, \text{ so ist } x' = - \frac{a^2}{x''}.$$

Nimmt man also $CN = \frac{b^2}{y''}$ und $CM = \frac{a^2}{x''}$,

so wird die Linie, die M, N verbindet, die Hyperbel in den verlangten Berührungspunkten schneiden.

§. 193. Zusatz 1. Die Gleichung der Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$a^2 y'' y' - b^2 x'' x' = - a^2 b^2.$$

§. 194. Zusatz 2. Da CM von y'' unabhängig ist, so folgt, daß, wenn von verschiedenen Punkten einer auf CX senkrechten Linie Tangenten-Paare an die Hyperbel gezogen werden, die Sehnen, welche die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn werden.

Zweites Kapitel.

Von der Hyperbel, bezogen auf den Focus.

§. 195. Die Entfernung irgend eines Punktes in der Hyperbel von dem einen und dem andern Focus zu finden. (Fig. 64.)

Es sei ein Focus S, der andere H, P irgend ein Punkt (x, y) in der Hyperbel, den Werth von SP und HP zu finden.

(1) Von SP.

Allgemein ist die Entfernung zweier Punkte (x, y) und (x′, y′) nach §. 14.

$$= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

aber die Coordinaten von S sind $x' = ae$, und $y = o$, da der Punkt in der Axe der x liegt;

daher $SP^2 = (x - ae)^2 + y^2$

$$= (x - ae)^2 + (e^2 - 1)\ (x^2 - a^2)$$
$$= x^2 - 2aex + a^2e^2 + e^2x^2 - e^2a^2$$
$$- x^2 + a^2$$
$$= a^2 - 2aex + e^2x^2;$$

d. h. $SP = ex - a.$

(2) Auf gleiche Weise

$HP = ex + a.$

Erklärung. Die Entfernung irgend eines Punktes von dem Focus, heißt der Focal-Abstand.

§. 196. Zusatz. Hieraus erhält man, indem man SP von HP abzieht

$$HP - SP = 2a.$$

Mit andern Worten: der Unterschied der Focal-Abstände ist gleich der Queraxe.

Aus dieser Eigenschaft kann die Gleichung der Hyperbel abgeleitet werden, wie in dem analogen Falle bei der Ellipse. (§. 114.)

§. 197. Den Ort eines Punktes zu finden, so daß der Unterschied seiner Abstände von zwei festen Punkten beständig einer gegebenen Größe 2a gleich ist. (Fig. 65.)

Es seien S und H die zwei festen Punkte, P der Punkt, dessen Ort man sucht.

Verbinde S, H, S, P und HP, halbire SH in C; ziehe die Senkrechte PM auf SH, und verlängere dieses nach X zu unbegränzt; von C ziehe CY senkrecht zu CX, und nimm CX und CY als die Coordinaten Axen.

Es sei $CM = x$, $MP = y$, und $SC = c$;

dann ist $\left.\begin{array}{l} SP^2 = SM^2 + MP^2 = y^2 + (c - x)^2 \\ HP^2 = HM^2 + MP^2 = y^2 + (c + x)^2 \end{array}\right\} \ldots (1);$

d. h. $HP^2 - SP^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2,$

oder $(HP + SP)\,(HP - SP) = 4cx;$

aber $HP - SP = 2a;$

daher $HP + SP = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a},$

und $HP - SP = 2a,$

daher $HP = \frac{cx}{a} + a,$

und $SP = \frac{cx}{a} - a.$

Quadrirt man diese Werthe, und addirt die Ergebnisse, so ist $HP^2 + SP^2 = 2\left(\frac{c^2x^2}{a^2} + a^2\right)$

Eben so ist $HP^2 + SP^2 = 2(y^2 + c^2 + x^2)$ wenn man die Gleichungen (1) addirt;

daher $y^2 + c^2 + x^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2;$

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - c^2 - x^2$$

$$= \frac{{}^2}{a^2}(c^2 - a^2) + (a^2 - c^2)$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Querаxe $= 2a$, und deren conjugirte Axe $= 2\sqrt{c^2 - a^2}$ ist.

Ist $x = o$, so ist $y^2 = -(c^2 - a^2) = -b^2$, wo b die imaginaire Ordinate von C bedeutet.

§. 198. Die Polar-Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn der Focus der Pol ist. (Fig. 66.)

(1) Es sei S der Pol.

Es sei $SP = r$, Winkel $ASP = \omega$.

Dann ist $r = ex - a$, (195.)

aber $x = CM = CS + SM$

$= ae + r \cos (\pi - \omega)$

$= ae - r \cos \omega$

daher $r = ae^2 - er \cdot \cos \omega - a$;

d. h. $r = a \frac{e^2-1}{1+e \cdot \cos \omega}$,

welches die gesuchte Gleichung ist.

(2) Es sei H der Pol.

Es sei $HP = r'$, Winkel $PHA = \omega'$;

dann $r' = ex + a$;

aber $X = CM = HM - HC$.

$= r' \cos \omega' - ae$;

d. h. $r' = er' \cos \omega' - ae^2 + a$;

d. h. $r' = - a \frac{e^2 - 1}{1 - e \cos \omega'}$,

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 199. Zusatz 1. Verlängere PS, bis es die Hyperbel in p′ trifft, dann, weil $ASp = \pi - \omega$, ist

$$Sp = a \frac{e^2 - 1}{1 - e \cos \omega}.$$

§. 200. Zusatz 2. Hieraus ist

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{Sp} = \frac{1 + e\cos\omega}{a(e^2 - 1)} + \frac{1 - e\cos\omega}{a(e^2 - 1)}$$

$$= \frac{2}{a(e^2 - 1)}$$

$$= \frac{2}{SL},$$

d. h. der halbe Hauptparameter ist ein harmonisches Mittel zwischen den Segmenten irgend einer Sehne, die durch den Focus geht.

§. 201. Zusatz 3. Da

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{Sp} = \frac{SP + Sp}{SP \cdot Sp},$$

und auch

$$= \frac{2}{a(e^2-1)};$$

d. h. $SP \cdot Sp = \frac{1}{2} a(e^2-1)(SP + Sp)$.

(§. 202. Die Polar-Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn der Mittelpunkt der Pol ist. (Fig. 66.)

Nimm an, die Punkte C, P seien verbunden, und setze $CP = \varrho$ und Winkel $PCA = \upsilon$.

dann

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

$$= x^2 + (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$$

(§§. 174. 175.)

$$= e^2x^2 - a^2(e^2 - 1)$$

$$= e^2\varrho^2 \cos^2\upsilon - a^2(e^2 - 1);$$

d. h. $\varrho^2(1-e^2\cos^2\upsilon) = a^2(e^2-1)$;

daher $\varrho = a\sqrt{\dfrac{e^2-1}{1-e^2\cos^2 v}}$,

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 203. Die Focal-Abstände irgend eines Punktes machen mit der Tangente an diesem Punkte gleiche Winkel. (Fig. 67.)

Es sei TPt eine Tangente irgend eines Punktes P (x', y'); ziehe die Normale PG, und verbinde S, P, und H, P;

$$\text{dann ist } CG = \frac{a^2+b^2}{a^2}x' \text{ (191.)} = e^2x' \text{ (174.)}.$$

$$\text{Nun } \frac{SG}{HG} = \frac{CG-CS}{CG+CS} = \frac{e^2x'-ae}{e^2x'+ae}$$

$$= \frac{ex'-a}{ex'+a} = \frac{SP}{HP} \text{ (195.)}$$

daher halbirt PG den Winkel SPh. (Eukl. VI. Satz 3.)

Nun ist der rechte Winkel GPT = GPt,
und Winkel GPS = GPh,
daher der übrig bleibende Winkel SPT = hPt = HPT, d. h. SP und HP machen gleiche Winkel mit der Tangente in P, wie zu beweisen war.

§. 204. Den Ort der Punkte zu finden, in welchem eine Senkrechte vom Focus auf die Tangente irgend eines Punktes, die Tangente schneidet. (Fig. 68.)

Es sei PT die Tangente irgend eines Punktes (x', y') und SY eine Senkrechte von S auf PT, den Ort von Y zu finden.

Von

Von C ziehe die Senkrechte CQ auf PT, und ziehe Sq parallel zu PT, so daß sie die verlängerte CQ in q treffe.

$$\text{Dann ist}\quad CY^2 = CQ^2 + QY^2$$
$$= CQ^2 + Sq^2$$
$$= CT^2 \sin^2 T + CS^2 \cos^2 T;$$

aber $CT = \frac{a^2}{x'}$ (188), und $CS = ae$;

$$\text{daher}\quad CY^2 = \frac{a^4}{x'^2} \sin^2 T + a^2e^2 \cos^2 T$$
$$= \frac{a^4}{x'^2} (1 - \cos^2 T) + a^2e^2 \cos^2 T$$
$$= \frac{a^4}{x'^2} + \frac{a^2}{x'^2} (e^2x'^2 - a^2) \cos^2 T \ldots. \quad (1);$$

aber $\tang T = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$, (186.);

deshalb wie in (§. 121.), $\cos^2 T = \frac{x'^2 - a^2}{e^2x'^2 - a^2}$;

und dies substituirt in (1)

$$CY^2 = \frac{a^4}{x'^2} + \frac{a^2}{x'^2} (e^2x'^2 - a^2) \frac{x'^2 - a^2}{e^2x'^2 - a^2}$$
$$= \frac{a^4}{x'^2} + \frac{a^2}{x'^2} (x'^2 - a^2),$$
$$= \frac{a^4}{x'^2} + a^2 - \frac{a^4}{x'^2}$$
$$= a^2;$$

daher $CY = \pm a$,

deshalb ist der Ort von Y ein Kreis, beschrieben über der Queraxe.

[9]

§. 205. Das Rechteck aus den Senkrechten, die von dem einen und dem andern Focus auf die Tangente irgend eines Punktes gezogen werden, ist gleich dem Quadrate der halben conjugirten Axe. (Fig. 68.)

Denn $SY = ST \sin T$,

aber $$ST = CS - CT = ae - \frac{a^2}{x'} = \frac{a}{x'}(ex' - a);$$

d. h. $$SY = \frac{a}{x'}(ex' - a) \sin T.$$ Auf gleiche Weise

$$HZ = \frac{a}{x'}(ex' + a) \sin T;$$

d. h. $$SY \cdot HZ = \frac{a^2}{x'^2}(e^2x'^2 - a^2) \sin^2 T;$$

aber so wie in der Ellipse (§. 122.) ist

$$\sin^2 T = \frac{e^2x'^2 - x'^2}{e^2x'^2 - a^2};$$

daher $$SY \cdot HZ = \frac{a^2}{x'^2}(e^2x'^2 - a^2) \cdot x'^2 \frac{(e^2 - 1)}{e^2x'^2 - a^2}$$
$$= a^2(e^2 - 1) = b^2,$$

wie zu beweisen war.

Drittes Kapitel.

Von der Hyperbel, bezogen auf irgend ein System conjugirter Diameter.

Erster Abschnitt.

Von conjugirten Diametern im Allgemeinen.

§. 206. Den Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen zu finden. (Fig. 69. a. a.)

Es sei Pp irgend eine Sehne, O ihr Mittelpunkt; von den Punkten O, P, p ziehe die Senkrechten ON, PM, pm auf die Axe AX.

Es sei $CN = X,\ NO = Y$;
ist nun die Gleichung für Pp

$$y = \alpha x + \beta \ldots\ldots (1),$$

so wird die Gleichung, welche die Werthe von y in den Punkten P, p enthält, nach (§. 185.) sein

$$y^2 + \frac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2 - b^2}\, y + b^2\, \frac{a^2\alpha^2 - \beta^2}{a^2\alpha^2 - b^2} = o.$$

Nun, da in jeder quadratischen Gleichung der Coefficient des zweiten Gliedes, mit seinem eigenthümlichen Zeichen, gleich ist der Summe der Wurzeln mit verändertem Zeichen, so ist

$$\frac{2b^2\beta}{a^2\alpha^2 - b^2} = -(PM + pm).$$

Da aber O der Mittelpunkt von Pp ist, so ist

$$ON = \frac{Pm + pm}{2};$$

d. h. $$Y = \frac{-b^2\beta}{a^2\alpha^2 - b^2} \ldots\ldots (2).$$

Nun genügen X und Y der Gleichung (1), da sie die Coordinaten eines Punktes in Pp sind, daher

$$X = \frac{1}{\alpha}(Y - \beta)$$

$$= \frac{-a^2\alpha\beta}{a\alpha^2 - b^2} \ldots\ldots (3).$$

Um die Beziehung zwischen X und Y zu erhalten, muß man aus (2) und (3) β eliminiren;

daher $$\frac{a^2\alpha^2 - b^2}{b^2} Y = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{a^2\alpha} X;$$

d. h. $$Y = \frac{b^2}{a^2\alpha} X.$$

Nun bleibt α dasselbe für alle Sehnen parallel zu Pp (18.), daher drückt die eben gefundene Gleichung das Verhältniß der Coordinaten ihrer Mittelpunkte aus, und da sie vom ersten Grade ist, so ist der gesuchte Ort eine gerade Linie.

Erklärung. Die gerade Linie, von der eben gezeigt ist, daß sie der Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ist, heißt ein Diameter, und die Punkte, in welchen sie die Kurve schneidet, heißen die Scheitel.

Die Buchstaben X und Y wurden eingeführt, um die beiden Arten der Coordinaten zu unterscheiden, und die Gleichung eines Diameters, der irgend eine Sehne

$$y = \alpha x + \beta$$

halbirt, kann immer geschrieben werden

$$y = \frac{b^2}{a^2\alpha} x.$$

Aus dieser Form ist klar (6.), daß jeder Diameter durch den Mittelpunkt geht.

§. 207. **Den Durchschnitt irgend eines Diameters mit der Hyperbel zu finden.** (Fig. 70.)

Da die Gleichung irgend eines Diameters ist

$$y = \alpha x$$

und die der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2,$$

so werden die Coordinaten des Durchschnittspunktes erhalten werden, wenn man diese beiden Gleichungen combinirt; man hat dann

$$(a^2\alpha^2 - b^2)\, x^2 = - a^2b^2;$$

hieraus $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\alpha^2}}$ = CM oder Cm,

und $y = \pm \frac{ab\alpha}{\sqrt{b^2 - a^2\alpha^2}}$ = PM oder pm

als die gesuchten Coordinaten.

§. 208. **Zusatz 1.** Da AM = am, und PM = pm, so folgt, daß jeder Diameter im Mittelpunkt halbirt wird.

§. 209. **Zusatz 2.** Damit der Diameter die Hyperbel treffe, muß sein

$$b^2 > a^2\alpha^2,$$

oder $\pm b > a\alpha,$

daher $\alpha < \pm \frac{b}{a}$ sein muß.

Von dem Scheitel A (Fig. 71.) ziehe AE und Ae senkrecht zu AC, und beides gleich CB; ziehe CE und Ce, und verlängere sie unbegränzt nach Z und z.

Denn da $\tan ZCX = \frac{EA}{AC} = \frac{b}{a}$

und $\tan zCX = \frac{eA}{AC} = -\frac{b}{a}$,

so folgt, daß die Diameter CZ, Cz die Kurve in einer begränzten Entfernung nicht treffen werden.

Die Linien CZ, Cz heißen wegen dieses Umstandes Asymptoten.

§. 210. Wenn ein Diameter durch einen gegebenen Punkt gezogen ist, die Gleichung für irgend eine seiner Ordinaten zu finden.

Wenn x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes sind, so ist die Gleichung des Diameters, der durch ihn gezogen ist,

$$y = \frac{y'}{x'} x \dots\dots\dots (1).$$

Es sei $y = \alpha x + \beta \dots\dots (2)$,

die gesuchte Gleichung für irgend eine Ordinate, dann ist

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b^2}{a^2 \alpha} \; (206);$$

d. h. $\alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$,

daher ist die Gleichung irgend einer Ordinate eines Diameters, der durch (x', y') geht,

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x + \beta.$$

§. 211. Zusatz. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung der Tangente (186.), so sieht man,

daß die Tangente an dem Scheitel irgend eines Diameters parallel ist mit den Ordinaten dieses Diameters.

§. 212. Wenn zwei Diameter gegeben sind, und die Ordinaten des einen sind parallel zu dem andern, so werden die Ordinaten des letztern dem erstern parallel sein. (Fig. 72.)

Es seien CP, CD zwei Diameter, und MN, QR beziehungsweise von ihnen halbirte Sehnen; wird nun MN parallel angenommen zu CD, so ist zu beweisen, daß QR parallel zu CP ist.

Sind die Gleichungen für CP, CD

$$y = \alpha x \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

$$y = \alpha' x \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (2)$$

dann sind nach (§. 210.) die Gleichungen für MN, QR

$$y = \frac{b^2}{a^2\alpha} x + \beta \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1'),$$

$$y = \frac{b^2}{a^2\alpha'} x + \beta' \, . \, . \, . \, . \, (2').$$

Aber wenn MN parallel zu CD ist, so ist

$$\alpha' = \frac{b^2}{a^2\alpha} \; (18.);$$

d. h.

$$\alpha = \frac{b^2}{a^2\alpha'},$$

daher wird durch Substitution in (2′) die Gleichung für QR

$$y = \alpha x + \beta',$$

d. h. (18.) QR ist parallel zu CP, wie zu beweisen war. Daher ist jeder der beiden Diameter CP, CD parallel zu den Ordinaten des andern.

Diameter in dieser Beziehung zu einander, heißen conjugirte Diameter.

§. 213. Zusatz 1. Deshalb, wenn die beiden Diameter
$$y = \alpha x,$$
$$y = \alpha' x$$
conjugirte zu einander sind, so ist
$$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}.$$

§. 214. Daher, wenn
$$y = \alpha x$$
ein Diameter ist, so ist
$$y = \frac{b^2}{a^2 \alpha} x$$
der ihm conjugirte.

§. 215. Zusatz 3. Da (α) jeden Werth zwischen o und π haben kann, so ist die Anzahl von Paaren conjugirter Diameter unbegränzt.

Ist $\alpha = o$, oder nimmt man als ersten Diameter die Queraxe Aa an, so ist
$$\alpha' = \frac{b^2}{a^2 \cdot o} = \infty,$$
daher ist der conjugirte Durchmesser zu Aa, indem er rechtwinklicht auf demselben ist, die conjugirte Axe Bb; daher sind die Axen conjugirte Diameter; und es kann genau, wie in §. 131. gezeigt worden, daß sie die einzigen conjugirten Durchmesser sind, welche rechtwinklicht zu einander sind.

§. 216. Zusatz 4. Ist (x′, y′) irgend ein Punkt in der Hyperbel, so ist der durch ihn gehende Diameter
$$y = \frac{y'}{x'} x;$$

daher $$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x$$
der ihm correspondirende conjugirte Diameter ist.

Aber die Gleichung der Tangente an den Punkt (x', y') ist (186.)

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x'),$$

woraus folgt (18.), daß die Tangente an dem Scheitel irgend eines Diameters parallel ist zu dem entsprechenden conjugirten Diameter.

§. 217. Von zwei beliebigen conjugirten Diametern kann nur einer die Kurve treffen.

Denn es seien

$$y = \alpha x$$
$$y = \alpha' x$$

beliebige conjugirte Diameter.

Es wurde gezeigt (209.), daß kein Diameter die Kurve treffen kann, wenn nicht

$$\alpha < \frac{b}{a}.$$

Man nehme nun an, daß in einem gegebenen Systeme der erste Diameter die Kurve treffe, dann ist

$$\alpha < \frac{b}{a},$$

aber $$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2} \text{ (213)}$$

d. h. $$\alpha' > \frac{b}{a},$$

und folglich kann der zweite Diameter die Kurve nicht treffen.

§. 218. **Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn sie auf irgend zwei beliebige conjugirte Durchmesser als Axen bezogen wird. (Fig. 73.)**

Es seien CP, CD irgend ein System conjugirter Diameter, als Axen der Coordinaten angenommen, und x, y und x', y' seien die Coordinaten irgend eines Punktes in der Hyperbel, wenn sie beziehungsweise auf die alten und neuen Axen bezogen ist.

Der Zweck ist nun, x und y durch x' und y' auszudrücken, und dann die sich ergebenden Werthe in die Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \; ..... \; (1)$$

zu substituiren, welches dann die gesuchte Gleichung geben wird.

Nun kann eben so, wie in der Ellipse (132.), gezeigt werden, daß, wenn $\vartheta = X'CA$ und $\varphi = Y'CA$ ist,

$$x = x' \cos\vartheta + y' \cos\varphi,$$

$$y = x' \sin\vartheta + y' \sin\varphi;$$

daher durch Substitution in (1),

$$a^2 \left\{x' \cos\vartheta + y' \cos\varphi\right\}^2 - b^2 \left\{x' \sin\varphi + y' \sin\varphi\right\}^2$$

$$= - a^2b^2.$$

oder

$$(a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi)y'^2 + (a^2 \sin^2\vartheta - b^2 \cos^2\vartheta)\, x'^2$$
$$+ 2x'y' (a^2 \sin\vartheta \sin\varphi - b^2 \cos\vartheta \cos\varphi)$$
$$= - a^2b^2.$$

Aber $\quad \tan\vartheta \cdot \tan\varphi = \frac{b^2}{a^2}$ (213.);

daher $\quad a^2 \sin\vartheta \sin\varphi - b^2 \cos\vartheta \cos\varphi = 0;$

deshalb verschwindet das Glied, welches x', y' enthält, und die gesuchte Gleichung ist von der Form

$$(a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi)\, y'^2 - (b^2 \cos^2\vartheta - a^2 \sin^2\vartheta)\, x'^2$$
$$= - a^2b^2 \; ... \; (2).$$

Wenn nun die Axe CX′ die Hyperbel trifft, ist

$$y' = o \text{ und } x' = CP = a'$$

daher $$b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \varphi = \frac{a^2 b^2}{a'^2}.$$

Nun sei $x' = o$, da dann die Axe Cy′ nach (§. 217.) die Hyperbel nicht trifft, kann man y′ oder CD $= b'\sqrt{-1}$ annehmen;

daher $a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi = \frac{-a^2b^2}{-b'^2} = \frac{a^2b^3}{b'^2}$;

deshalb durch Substitution in (2),

$$\frac{a^2b^2}{b'^2} y'^2 - \frac{a^2x^2}{a'^2} x'^2 = - a^2b^2,$$

oder, wenn man jedes Glied durch a^2b^2 dividirt,

$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{x'^2}{a'^2} = -1,$$

oder $$a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = - a'^2b'^2,$$

welches beides die gesuchte Gleichung ist.

§. 219. Zusatz 1. Hieraus ergiebt sich, wenn man die Accente der Coordinaten wegläßt,

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2}.$$

§. 220. Zusatz 2. Die Form der Gleichung zu finden, wenn die Coordinaten in P den Scheitel des Diameters CP anfangen. (Fig. 73.)

Es sei $PV = x'$, dann ist $x = CP + PV$
$= a' + x'$.

Diesen Werth von x in Zusatz 1. substituirt, hat man

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(x' + a')^2 - a'^2},$$

oder den Accent von x weggelassen

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 + 2a'x},$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 221. Zusatz 3. Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind von derselben Form, wie die Gleichungen in Beziehung auf die Axen (§. 175.), und drücken eine Eigenschaft der Hyperbel aus;

dann $x^2 - a'^2 = (x + a')(x - a') = PV \cdot VG,$

und $2a'x + x^2 = (2a' + x)\, x \quad = PV \cdot VG;$

daher $VQ^2 = \frac{PC^2}{CD^2} \cdot PV \cdot VG,$

oder $PV \cdot VG : QV^2 = PC^2 : CD^2$

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten irgend eines Diameters verhält sich zu dem Quadrate der Ordinate, wie das Quadrat des halben Diameters zu dem Quadrat seines halben conjugirten Diameters.

§. 222. Aus dem vorstehenden §. ist klar, daß die Gleichung der Hyperbel dieselbe Form behält, die Axen der Coordinaten mögen rechtwinklicht oder schiefwinklicht sein; woraus folgt, wenn die Axen schiefwinklicht sind,

(1) daß wenn die Gleichung der Quer-Axe Aa ist

$$y = \alpha x,$$

die Gleichung für die conjugirte Axe sein wird

$$y = \frac{b'^2}{a'^2 \alpha}\, x.$$

(2) Daß die Gleichung einer Tangente irgend eines Punktes (x', y') ist

$$a'^2 yy' - b'^2 xx' = - a'^2 b'^2.$$

§. 223. Den Durchschnitt einer Tangente mit irgend zwei conjugirten, als Axen betrachteten, Diametern zu finden. (Fig. 74.)

Es sei eine Tangente gezogen am Punkte Q (x', y') und treffe CP in T, und CD in t, ziehe die Ordinaten QV, Ov. Dann sei die Gleichung der Tangente

$$a'^2yy' - b'^2xx' = - a'^2b'^2;$$

begegnet nun die Tangente CX in T, so ist $y = o$;

und $$x = \frac{a'^2}{x'}, \text{ oder } CT = \frac{CP^2}{CV}.$$

Die Tangente begegne der CY in t, dann $x = o$;

und $$y = \frac{-b'^2}{y'}, \text{ oder } Ct = \frac{CD^2}{Cv}.$$

Woher die Durchschnittspunkte bekannt sind.

Siehe (188.), welches nun ein besonderer Fall dieses §. ist.

§. 224. Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, Tangenten-Paare an die Hyperbel gezogen werden, so werden die Linien, welche die zusammengehörigen Berührungspunte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

Es sei C der Mittelpunkt der Hyperbel, MN die gegebene Linie, ziehe eine beliebige Sehne mn parallel zu MN, und halbire sie durch den Diameter CX; von C ziehe CY parallel zu mn oder MN, dann sind CX, CY conjugirte Durchmesser (212.), und wird die Hyperbel auf diese als Axen bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = - a'^2b'^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

Von irgend einem Punkte (x'', y'') in MN ziehe ein Tangenten-Paar an die Hyperbel, so kann, wie in §. 192., gezeigt werden, daß die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$a'^2y''y' - b'^2x''x' = - a'^2b'^2 \dots\dots (2),$$

in welcher x', y' die veränderlichen Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Es schneide nun die gerade Linie (2) die Axe der x, dann ist $y' = 0$ und daher

$$x' = \frac{a'^2}{x''};$$

weshalb der Durchschnittspunkt derselbe sein wird, für alle Punkte, deren Abscissen $= x''$ sind, d. h., für alle Punkte in der Linie MN, wie zu beweisen war.

§. 225. Zusatz. Der Durchschnittspunkt liegt in dem Diameter, der dem conjugirt ist, welcher der gegebenen Linie parallel ist.

§. 225. **Wenn von dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten ein Diameter gezogen wird, so halbirt er die Linie, welche die Berührungspunkte verbindet.**

Denn die Gleichung einer Ordinate eines Diameters, der durch (x'', y'') geht, ist (210.)

$$y = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x + \beta \dots\dots (1),$$

und die Gleichung der Linie, die die Berührungspunkte verbindet, ist

$$y' = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x' - \frac{b'^2}{y''} \dots\dots (2),$$

weshalb die letztern, indem sie (18.) der ersteren parallel ist, auch eine Ordinate und deshalb halbirt ist.

§. 227. Wenn durch irgend einen Punkt innerhalb oder ausserhalb der Hyperbel zwei gerade, der Lage nach gegebene Linien gezogen werden so, daß sie die Kurve treffen, so wird das Rechteck aus den Abschnitten der einen in einem beständigen Verhältniß zu dem Rechtecke aus den Abschnitten der andern sein. (Fig. 75.)

Es sei O irgend ein Punkt innerhalb der Hyperbel, durch welchen zwei gerade Linien Pp, Qq, deren Lage bekannt ist, gezogen werden so, daß sie die Hyperbel in P, p und Q, q treffen, zu beweisen nun, daß

$$OP \cdot Op : OQ \cdot Oq$$

in einem constanten Verhältniß ist.

Durch O ziehe den Diameter CX, und sein conjugirter Diameter sei CY; wird nun die Hyperbel auf diese als Axen bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \ldots\ldots\ (1).$$

Durch P ziehe PM parallel zu CY, und setze OP = r, CO = δ;

dann ist $\frac{PM}{PO} = \frac{\sin POM}{\sin PMO} = \frac{\sin r, x}{\sin x, y}$

$$\text{daher } y = \frac{\sin r, x}{\sin x, y}\, r.$$

Auf gleiche Weise $x = \delta - \frac{\sin r, y}{\sin x, y}\, r$,

oder: bezeichnet man den Coefficienten von r mit p, im ersten, und mit q im zweiten Falle, und substituirt diese Werthe von x und y in (1),

$$a'^2p^2r^2 - b'^2\left\{\delta^2 - 2\delta qr + q^2r^2\right\} = -a'^2b'^2;$$

$$\text{d. h. } r^2 + \frac{2\delta qb'^2}{a'^2p^2 - b'^2q^2}\, r - \frac{b'^2(\delta^2 - a'^2)}{a'^2p^2 - b'^2q'^2} = 0,$$

in welcher die Werthe von r sind OP, Op;

daher $$OP \cdot Op = \frac{b'^2 (\delta^2 - a'^2)}{a'^2 p^2 - b'^2 q^2}.$$

Auf gleiche Weise

wenn $OQ = r'$ und p' und q' bezeichnen $\frac{\sin r', x}{\sin x, y}$

und $\frac{\sin r', y}{\sin x, y}$,

$$OQ \cdot Oq = \frac{b'^2 (\delta^2 - a'^2)}{a'^2 p'^2 - b'^2 q'^2},$$

weswegen

$$OP \cdot Op : OQ \cdot Oq = a'^2 p'^2 - b'^2 q'^2 : a'^2 p^2 - b'^2 q^2,$$

welches ein constantes Verhältniß ist, wie zu beweisen war.

Zweiter Abschnitt.

Von den Eigenschaften conjugirter Diameter.

§. 228. Wenn ein Diameter durch einen gegebenen Punkt P (x', y') gezogen ist, die imaginairen Coordinaten des Endpunktes seines conjugirten Diameters zu finden. (Fig. 73.)

Es seien CP, CD irgend zwei conjugirte Diameter, von denen der erste durch den gegebenen Punkt P (x', y') gezogen ist; dann wird der letztere CD die Hyperbel nicht treffen. (§. 217.) Wenn nun

$$y = \frac{y'}{x'} x \ldots\ldots (1)$$

die

die Gleichung von CP ist, so wird

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x \ldots\ldots (2),$$

die Gleichung für CD sein; deshalb wird man die imaginairen Coordinaten des Punktes D finden, wenn man Gleichung (2) mit dieser Gleichung verbindet,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \ldots\ldots (3).$$

Substituirt man in (3) den Werth von y aus (2) und dividirt das Ergebniß durch b^2, so hat man

$$\left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'^2}{y'^2} + 1\right) x^2 = a^2;$$

daher $(a^2y'^2 - b^2x'^2)\, x^2 = a^4y'^2$,

oder $-a^2b^2x^2 = a^4y'^2$;

deshalb $x = \pm \frac{a}{b\sqrt{-1}} \cdot y'$;

und $y = \frac{b^2x'}{a^2y'}\, x$

$$= \pm \frac{b\sqrt{-1}}{a}\, x'.$$

§. 229. **Die Differenz der Quadrate irgend zweier conjugirter Diameter ist gleich der Differenz der Quadrate der halben Axen.** (Fig. 73.)

Es seien Cp, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, bezeichnet man sie nun beziehungsweise mit a', und $b'\sqrt{-1}$, so ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$-b'^2 = -\frac{a^2}{b^2}\, y'^2 - \frac{b^2}{a^2}\, x'^2$$

d. h. $a'^2 - b'^2 = x'^2 - \frac{a^2}{b^2} y'^2 + y'^2 - \frac{b^2}{a^2} x'^2$

$$= \frac{b^2x'^2 - a^2y^2}{b^2} + \frac{a^2y'^2 - b^2x'^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2}$$

$$= a^2 - b^2,$$

wie zu beweisen war.

§. 230. **Wenn an den Endpunkten irgend zweier Diameter Tangenten gezogen werden, so daß sie ein Parallelogram bilden, so ist die Fläche aller solcher Parallelogramme beständig.** (Fig. 76.)

Es seien Pp, Dd irgend zwei conjugirte Diameter, und die Tangenten an P und p, D und d, werden verlängert, bis sie sich treffen, so ist klar (216), daß sie ein Parallelogram bilden werden.

Von P und T ziehe die Senkrechten PF, TQ auf DC.

Alsdann ist die Fläche des ganzen Parallelogrammes PC,

$$= 4PC \cdot CD \sin PCD$$
$$= 4CD \cdot PF \; \ldots\ldots\ldots \; (1).$$

Aber $PF = TQ = CT \sin TCQ = \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{Dm}{DC}$ *)

(188.);

daher $PF \cdot CD = \frac{a^2}{x'} \cdot mD$

---

*) Die Linie Dm, welche nicht in der Figur ist, ist die imaginaire Ordinate des Punktes D.

$$= \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{b\sqrt{-1}}{a} x'$$

$$= ab\sqrt{-1} \ldots\ldots (2),$$

deshalb ist durch Substitution in (1) die Fläche des ganzen Parallelogrammes

$$= 4ab\sqrt{-1},$$

und ist daher eine constante Größe.

Die imaginaire Größe bei diesem Ausdrucke zeigt an, daß das Parallelogram nicht, wie in der Ellipse, der Kurve umschrieben ist.

§. 231. Zusatz 1. Aus der Gleichung (2)

$$PF \cdot CD = ab \cdot \sqrt{-1},$$

aber $CD = b'\sqrt{-1}$, und $PF = PC \sin PCD$

$= a' \sin \gamma$, wenn $PCD = \gamma$.

folgt $$ab = a'b' \sin \gamma$$

§. 232. Zusatz 2. Hieraus kann der Werth von PF gefunden werden;

den $$PF = \frac{ab}{CD} = \frac{ab}{\sqrt{a'^2 - (a^2 - b^2)}}.$$

§. 233. Da $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$, so können bei der Hyperbel die conjugirten Diameter nicht einander gleich sein.

§. 234. Das Rechteck aus den Focal-Abständen irgend eines Punktes ist gleich dem Quadrate des halben Diameters, welcher dem conjugirt ist, der durch den gegebenen Punkt geht. (Fig. 64.)

Es sei P irgend ein Punkt, CD der halbe zu CP conjugirte Diameter; verbinde P, S und P, H; zu beweisen nun, daß

$$SP \cdot PH = CD^2.$$

Da $CP^2 - CD^2 = a^2 - b^2$;

so ist
$$\begin{aligned} CD^2 &= CP^2 - a^2 + b^2 \\ &= x^2 + y^2 - a^2 + b^2 \\ &= x^2 + (e^2 - 1)(x^2 - a^2) - a^2 + b^2 \\ &= e^2x^2 - e^2a^2 + b^2 \\ &= e^2x^2 - a^2 \\ &= (ex - a)(ex + a) \\ &= SP \cdot HP \ (195.). \end{aligned}$$

§. 235. Es seien CP, CD irgend zwei conjugirte Diameter, und eine Tangente an P treffe die Axen der Hyperbel in T und t; zu beweisen, daß $PT \cdot Pt \cdot = CD^2$. (Fig. 77.)

Werden CP, CD als Coordinaten Axen angenommen, so sind die Gleichungen für CA, CB, (§. 222.)

$$y = \alpha x$$
$$y = \frac{b'^2}{a'^2 \alpha} x.$$

Es sei

$x = a'$ oder CP, dann ist y oder $PT = \alpha a'$ aus (1)

und y oder $Pt = \dfrac{b'^2}{a'\alpha}$ .... (2);

daher $$PT \cdot Pt = b'^2 = CD^2.$$

Dritter Abschnitt.

Von Supplementar=Sehnen.

Erklärung. Wenn von den Scheiteln irgend eines Diameters zwei gerade Linien nach einem Punkte in der Hyperbel gezogen werden, so heißen diese Supplementar=Sehnen.

§. 236. **Wenn zwei Supplementar=Sehnen gezogen sind, und die Gleichung der einen ist gegeben, die Gleichung der andern zu finden.** (Fig. 78.)

Wird die Hyperbel auf irgend zwei conjugirte Diameter bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \text{ ..... } (1).$$

Durch irgend einen Punkt P (x', y') ziehe den Diameter Pp, und es seien QP, Qp irgend zwei Supplementar=Sehnen, so ist erforderlich, wenn die Gleichung für QP ist

$$y - y' = \alpha(x - x') \text{ ..... } (2)$$

die Gleichung für Qp zu finden.

Da die Coordinaten von P, x', y' sind, so werden die von p sein $-x'$, $-y'$; deshalb wird die Gleichung für QP nach §. 12. von der Form sein

$$y + y' = \alpha'(x + x') \text{ .... } (3)$$

worin α' zu finden ist.

Da die Linien, deren Gleichungen (2) und (3) sind, sich in Q schneiden, so sind die Coordinaten dieses Punktes in beiden einander gleich; betrachtet man daher x und y als dieselben in beiden Gleichungen, so hat man, wenn man sie mit einander multiplicirt,

$$y^2 - y'^2 = \alpha\alpha'(x^2 - x'^2);$$

d. h.

$$\alpha\alpha' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} \text{ ..... } (4),$$

da aber x', y' die Coordinaten von P, einem Punkte in der Hyperbel sind, so werden sie Gleichung (1) ein Genüge leisten;

daher $$a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = - a'^2b'^2.$$

Zieht man diese von (1) ab, so hat man
$$a'^2 (y^2 - y'^2) - b'^2 (x^2 - x'^2) = o;$$

daher $$\frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

deshalb durch Substitution in (4)
$$\alpha\alpha' = \frac{b'^2}{a'^2} \text{ und } \alpha' = \frac{b'^2}{a'^2\alpha},$$

hiernach wird die Gleichung für pQ durch Substitution in (3)
$$y + y' = \frac{b'^2}{a'^2\alpha} (x + x').$$

§. 237. Zusatz 1. Pp falle mit der Queraxe Aa zusammen, dann ist die Gleichung für aQ, gezogen durch den Punkt a (— a, o)
$$y = \alpha (x + a),$$
deshalb ist die Gleichung für AQ (Fig. 79.), gezogen durch den Punkt A (a, o)
$$y = \frac{b'^2}{a'^2\alpha} (x - a).$$

§. 238. Zusatz 2. Wird die Hyperbel auf ihre Axen bezogen, so hat man nur a und b für a' und b' in obige Gleichung zu substituiren.

§. 239. Wenn zwei Diameter zu irgend zwei Supplementar-Sehnen parallel gezogen werden, so sind sie einander conjugirt.

Da die Gleichungen für irgend zwei Supplementar-Sehnen sind

$$y - y' = \alpha(x - x') \ldots\ldots (1)$$

und
$$y + y' = \frac{b'^2}{a'^2\alpha}(x + x') \ldots\ldots (2),$$

so setze, ein Diameter sei parallel gezogen zu der Sehne, deren Gleichung (1) ist, so ist seine Gleichung

$$y = \alpha x,$$

da nun die Gleichung seines conjugirten Diameters ist

$$y = \frac{b'^2}{a'^2\alpha} x,$$

so folgt, daß der letztere parallel ist zu (2), wie zu beweisen war.

§. 240. Zusatz 1. Hiernach kann ein Diameter gezogen werden, der einem gegebenen conjugirt ist.

Es sei Pp der gegebene Diameter, (Fig. 78.) und zuerst, die Queraxe sei gegeben.

Von a ziehe aR parallel zu Pp, und verbinde R, A; wird dann Dd durch C parallel zu RA gezogen, so ist dies der conjugirte Diameter zu Pp.

Zweitens, die Queraxe sei nicht gegeben. (Fig. 80.)

Ziehe irgend einen beliebigen Diameter Rr, durch r ziehe rQ parallel Pp, ziehe QR; wenn dann Dd durch C parallel zu RQ gezogen wird, so ist es der zu Pp conjugirte Diameter.

Diese Folgerungen sind an sich klar.

§. 241. Zusatz 2. Hieraus ist eine sehr einfache Methode abzuleiten, eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Hyperbel zu ziehn.

Es sei P der gegebene Punkt *), und zuerst sei die Queraxe gegeben.

Ziehe PC, und die Sehne aQ parallel, damit verbinde Q, A; wird dann PT parallel zu QA gezogen, so berührt es die Hyperbel in P.

Zweitens, wenn die Queraxe nicht gegeben ist, ziehe irgend einen Diameter BCr, der die Hyperbel in R, r trifft; verbinde P, C, ziehe r Q parallel zu PC, verbinde Q, R; wird dann PT parallel zu QR gezogen, so wird es eine Tangente in P sein.

§. 242. Den Winkel, den die Hauptsupplementar-Sehnen bilden, zu finden. (Fig. 79.)

Setze den Punkt Q (x′, y′) als Durchschnittspunkt der Sehnen AQ, aQ und nimm an, die Hyperbel sei auf ihre Axen bezogen; sind nun die Gleichungen für Qa, QA

$$y = \alpha\,(x + a)$$
$$y = \alpha'\,(x - a),$$

so ist $\quad \text{tang } AQa = \dfrac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'} \quad (21.)$

oder da $\quad \alpha\alpha' = \dfrac{b^2}{a^2},$

$$\text{tang } AQa = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad \ldots\ldots (1).$$

Nun ist $\alpha' = \text{tang } QAX = \dfrac{y'}{x' - a},$

*) Die Figuren in diesem Zusatze mögen durch den Leser ergänzt werden.

und $\alpha = \text{tang } QaX = \frac{y'}{x' + a}$;

d. h. $\alpha' - \alpha = y' \cdot \left(\frac{1}{x' - a} - \frac{1}{x' + a}\right)$

$$= y' \cdot \frac{2a}{x'^2 - a^2} = \frac{2ab^2}{a^2 y'},$$

daher durch Substitution in (1)

$$\text{tang } AQa = \frac{2ab^2}{y'(a^2 + b^2)}.$$

§. 243. Zusatz 1. Da das Zeichen dieser Größe positiv ist, so ist der Winkel immer spitz; deshalb also auch ist der Winkel, den zwei conjugirte Durchmesser bildet, immer spitz.

§. 244. Zusatz 2. Wenn $y' = 0$, so ist tang $AQa = \infty$, deshalb ist der Winkel ein rechter; wenn $y' = \infty$, tang $AQa = 0$, deshalb ist der Winkel $= 0$; deshalb kann der spitze Winkel, den die Supplementar-Sehnen in der Hyperbel bilden, durch alle Grade der Größe zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gehn.

§. 245. **Zwei conjugirte Diameter zu ziehn, die einen gegebenen Winkel einschließen.**

Die analytische Auflösung der Aufgabe ist der für die Ellipse ähnlich, außer daß die sich ergebende Gleichung eine quadratische vom vierten Grade ist. Wir werden daher sogleich die geometrische Construction geben.

Ziehe irgend einen Diameter Rr (Fig. 81.), der die Hyperbel in R, r trifft, und über demselben beschreibe einen Kreisabschnitt, der den gegebenen Winkel faßt und die Hyperbel in Q schneidet, verbinde QR, und Qr, und

diesen parallel ziehe die halbe Diameter CP, CD; diese sind die gesuchten Diameter.

Denn da sie den Supplementar-Sehnen QR, Qr parallel sind, so sind sie conjugirte Diameter, und Winkel PCD = RQr, daher dem gegebenen gleich.

Die Aufgabe gestattet, wie in der Ellipse, noch eine zweite Auflösung. Siehe §. 164.

Bei der Ellipse mußte der gegebene Winkel, den zwei Diameter bilden, innerhalb gewisser Gränzen sein, aber bei der Hyperbel ist eine solche Beschränkung nicht nöthig. (244.) und (164.)

Nach den bisher befolgten Grundsätzen wird es dem Leser keine Schwierigkeit machen, von den vermischten Sätzen über die Ellipse, Kap. 4., §. 165., solche abzuleiten, welche anwendbar bei der Hyperbel sind.

Viertes Kapitel.

Von den Asymptoten der Hyperbel.

Es wurde §. 209. gezeigt, daß gewisse Diameter der Hyperbel die Kurve erst in einer unendlichen Entfernung treffen, und aus diesem Grunde Asymptoten heißen. Da die Asymptoten also durch den Mittelpunkt gehn, und zur Queraxe unter einem Winkel geneigt sind, dessen tang $= \pm \frac{b}{a}$ ist, so ist ihre Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

§. 246. Es sei nun erforderlich, die Lage der Asymptoten zu finden, wenn die Hyperbel auf irgend zwei conjugirte Diameter bezogen ist.

Dazu ist nur nöthig, den Durchschnitt irgend eines Diameters

$$y = \alpha x \ldots\ldots\ldots (1)$$

mit der Hyperbel

$$a'^2 y'^2 - b'^2 x^2 = - a'^2 b'^2 \ldots (2)$$

zu finden.

Eliminirt man y aus (1) und (2), so ist

$$(a'^2 \alpha^2 - b'^2) x^2 = - a'^2 b'^2;$$

d. h. $$x = \pm \frac{a'b'}{\sqrt{b'^2 - a'^2 \alpha^2}};$$

und $$y = \pm \frac{a'b'\alpha}{\sqrt{b'^2 - a'^2 \alpha^2}}.$$

Solange nun $b'^2 > a'^2 \alpha^2$, oder $\alpha < \pm \frac{b'}{a'}$ ist, trifft der Diameter die Kurve; wenn aber $\alpha = \pm \frac{b'}{a'}$ so wird der Diameter eine Asymptote.

Wenn daher durch P (Fig. 82.) die Linie Ee gezogen wird, gleich und parallel mit Dd, und CE, Ce gezogen werden, so werden die Linien CEX' und CeY' Asymptoten sein.

Die Gleichung für CX' ist $y = \frac{b'}{a'} x$,

und die für CY' ist $y = \frac{-b'}{a'} x$.

§. 247. Zusatz 1. Da Ee die Hyperbel in P berührt (211.), so folgt, daß der Theil der Tangente,

welcher zwischen den Asymptoten liegt, im Berührungspunkte halbirt ist.

§. 248. Zusatz 2. Wenn Pn, PN parallel zu CX′, CY′ gezogen werden, so ist en = nC, und CN = NE, da eP = PE.

§. 249. Die Gleichung der Asymptoten kann aus der für die Kurve abgeleitet werden; denn man hat

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2}$$

worin y die Ordinate für die Hyperbel, und x die zugehörige Abscisse ist. Als nun die Gestalt der Hyperbel aus ihrer Gleichung abgeleitet wurde, wurde gezeigt, daß für jeden Werth von x, wie groß er immer sein mag, auch zwei gleiche Werthe für y mit entgegengesetzten Zeichen sich ergeben. Wird x daher unendlich groß angenommen, so wird die Ordinate der Kurve, mit der der Asymptoten übereinstimmen.

Entwickelt man daher in der obigen Gleichung den Werth von y, so hat man

$$y = \pm \frac{b'}{a'}x\left(1 - \frac{a'^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \frac{b'}{a'}x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a'^2}{x^2} - \ldots\right)$$

$$= \pm \frac{b'}{a'}x \mp \frac{a'b'}{2} \cdot \frac{1}{x} \ldots\ldots$$

Setze x = ∞, dann verschwinden alle Glieder, welche x im Nenner enthalten, und man hat

$$y = \pm \frac{b'}{a'}x,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 250. Die Asymptote kann angesehn werden als eine Tangente der Hyperbel an einen Punkt in unendlicher Entfernung.

Denn die Gleichung der Taugente an irgend einen Punkt (x', y') ist

$$a'^2yy' - b'^2xx' = - a'^2b'^2,$$

oder $$y = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x'}{y'} x - \frac{b'^2}{y'} \ldots. (1)$$

nun $$y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x'^2 - a'^2}.$$

Nun setze x' unendlich groß, dann verschwindet a'^2, verglichen mit x'^2;

daher $$y' = \pm \frac{b'}{a'} x',$$

daher durch Substitution in (1) der Gleichung der Tangente, wird sie, wenn der Punkt (x', y') unendlich entfernt ist,

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x \pm \frac{a'b'}{x'},$$

oder da $$\frac{a'b'}{x'} = o,$$

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

welches die Gleichung der Asymptote ist: woraus die Wahrheit des Satzes folgt.

§. 251. Wenn irgend eine Sehne der Hyperbel verlängert wird, bis sie den Asymptoten begegnet, so sind die Theile zwischen der Kurve und den Asymptoten gleich. (Fig. 82.)

Setze, die Sehne Qq sei verlängert, bis sie den Asymptoten in R, r begegnet, zu beweisen, daß

$$QR = qr.$$

Halbire Qq durch den Diameter CX, und ziehe CY als conjugirten Diameter; dann ist die Gleichung der Hyperbel

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x'^2 - a'^2} \ldots\ldots (1)$$

und der Asymptoten (246.)

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x \ldots\ldots\ldots (9).$$

Nun hat man für dieselbe Abscisse CM aus (1)

$$MQ = Mq,$$

und aus (2)

$$MR = Mr,$$

deshalb durch Subtraction

$$RQ = rq,$$

wie zu beweisen war.

§. 252. Zusatz. Hieraus $QR \cdot Qr = (MR - MQ)$
$(MR + MQ)$
$= MR^2 - MQ^2$

aber $$MR^2 = \frac{b'^2}{a'^2} x^2,$$

und $$MQ^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (x^2 - a'^2);$$

d. h. $$MR^2 - MQ^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\left\{x^2 - x^2 + a'^2\right\}$$
$$= b'^2 = CD^2;$$

also $$QR \cdot Qr = CD^2.$$

§. 253. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten, zu finden. (Fig. 82.)

Es sei P irgend ein beliebiger Punkt in der Hyperbel; ziehe CP, und die conjugirten Diameter Dd; durch P ziehe EPe gleich und parallel zu Dd; ziehe CE, Ce,

und verlängere sie unbegränzt nach X′ und Y′, so sind CX′ und CY′ Asymptoten. Nimmt man diese als Coordinaten Axen, so ist nun erforderlich, die Gleichung der Hyperbel zu finden.

Von P ziehe PN, Pn parallel zu CX′, CY′ und setze CN = x, NP = y, Winkel X′CY′ = 2ϑ.

Dann ist $CE = 2CN = 2x$ (248.),

und $Ce = 2Cn = 2y$;

daher $CE \cdot Ce = 4xy \;\ldots\ldots\; (1)$;

aber $CE \cdot Ce \sin 2\vartheta$ = dem doppelten Dreieck ECe
= dem doppelten Parallelogramm DP,
$= 2a'b' \sin\gamma = 2ab$ (231);

d. h. $$CE \cdot Ce = \frac{2ab}{\sin 2\vartheta};$$

hieraus $$xy = \frac{2ab}{4\sin 2\vartheta} = \frac{ab}{4\sin\vartheta\cos\vartheta} \;\ldots\; (2).$$

Nun ist $\tang\vartheta = \frac{b}{a}$;

daher $$\frac{b^2}{a^2} = \tang^2\vartheta = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \frac{\sin^2\vartheta}{1-\sin^2\vartheta};$$

d. h. $$b^2 - b^2\sin^2\vartheta = a^2\sin^2\vartheta;$$

d. h. $$\sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Auf ähnliche Art $$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

daher durch Substitution in (2)

$$xy = \frac{ab}{4ab}(a^2+b^2)$$

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Oder bezeichnet man diese Größe durch m^2, so ist $xy = m^2$, welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 254. Wenn die Gleichung der Hyperbel durch ihre Axen gegeben ist, die Gleichung derselben, auf ihre Asymptoten bezogen, zu finden. (Fig. 83.)

Es sei CX die Queraxe, CX′, CY′ die Asymptoten, P irgend ein Punkt in der Hyperbel; ziehe die Senkrechte PM auf CX, und ziehe PN parallel zu CY′.

Setze CM $= x$, MP $= y$; CN $= x'$, NP $= y'$, und X′CY′ $= 2\vartheta$. Nun ist erforderlich, aus der Gleichung zwischen x und y,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \;\ldots\ldots\; (1),$$

die zwischen x' und y' abzuleiten.

Von N und P ziehe Nm und Pn parallel zu PM und AM beziehungsweise.

$$\text{Dann ist } y = PM = Nm - Nn$$
$$= NC \cdot \sin NCm - NP \sin NPn,$$
$$= (NC - NP) \sin NCm,$$
$$= (x' - y') \sin \vartheta.$$

Auf gleiche Weise

$$x = (x' + y') \sin \vartheta;$$

$$\text{daher } a^2y^2 = (x'-y')^2 a^2 \sin^2\vartheta = (x'-y')^2 \frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

$$a^2y^2 = (x'-y')^2 a^2 \sin^2\vartheta = (x'+y')^2 \frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$$

$$\text{daher} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left\{(x'-y')^2 - (x'+y')^2\right\}$$

$$= - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\, 4x'y';$$

$$\text{aber} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2;$$

daher

daher $$4x'y' = a^2 + b^2,$$

oder $$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

welches (253.) die gesuchte Gleichung ist.

§. 255. Wenn die Asymptoten als Axen genommen werden, die Gleichung der Tangente an einen gegebenen Punkt (x', y') zu finden.

Nimmt man einen andern Punkt (x'', y'') in der Hyperbel, nahe dem ersten, so ist die Gleichung einer Linie durch (x', y') und (x'', y'')

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - y') \;\ldots\ldots\; (1);$$

aber da diese Punkte in der Hyperbel liegen, so hat man

$$x'y' = m^2$$

und $$x''y'' = m^2;$$

daher $$x''y'' - x'y' = o;$$

d. h. $$y'' = \frac{x'y'}{x''};$$

d. h. $$y'' - y' = \frac{x'y'}{x''} - y'$$

$$= -\frac{y'}{x''} (x'' - x');$$

also $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{y'}{x''},$$

deshalb durch Substitution in (1) wird die Gleichung der Secante

$$y - y' = -\frac{y'}{x''} (x - x').$$

Setze nun, der Punkt (x'', y'') falle mit (x', y') zusammen, dann ist $x'' = x'$, $y'' = y'$, und die Secante wird eine Tangente, deshalb ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x').$$

§. 256. Um diese Gleichung zu vereinfachen, multiplicire beide Seiten durch x';

d. h. $$yx' - xy' = - xy' + y'x';$$
$$yx' + xy' = 2x'y'$$
$$= 2m^2.$$

§. 257. Den Durchschnitt der Tangente mit den Asymptoten zu finden.

Die Gleichung der Tangente ist

$$yx' + xy' = 2m^2.$$

Es schneide die Tangente die Axe der x, z. B. in T,

dann $y = o$ und x oder $CP = \frac{2m^2}{y'}$;

schneidet sie die Axe der y, wie in t,

dann $x = o$, und y oder $Ct = \frac{2m^2}{x'}$.

§. 258. Hieraus $CP \cdot Ct = \frac{4m^4}{x'y'} = \frac{4m^4}{m^2}$
$= 4m^2$;

d. h. $\frac{1}{2}CT \cdot Ct \cdot \sin TCt = 2m^2 \sin TCt$,

d. h. die Fläche des Dreiecks $TCt = 2m^2 \sin TCt$. Mit andern Worten: wenn die Tangente irgend

eines Punktes verlängert wird, bis sie die Asymptoten trifft, so ist der Inhalt des abgeschnittenen Dreieckes constant.

§. 259. Wenn ein Punkt in der Hyperbel, und die Lage der Asymptoten gegeben ist, die Lage und Größe der Queraxe und des conjugirten Diameters zu finden. (Fig. 83.)

Es sei C der Mittelpunkt, CX′, CY′ die Asymptoten, und P der gegebene Punkt in der Hyperbel.

(1) Die Lage der Axen zu finden.

Halbire den Winkel X′CY′ und sein Supplement durch die Linien CX und CY; dann ist offenbar CX, CY die Lage der Queraxe und der conjugirten Axe.

(2) Ihre Größe zu finden.

Sind die Coordinaten des gegebenen Punktes P (x′, y′), so hat man

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

d. h. $a^2 + b^2 = 4x'y' \ldots\ldots (1),$

aber $\pm \frac{b}{a} = \text{tang } \tfrac{1}{2} X'CY' = \text{tang } \vartheta$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta},$$

oder $b^2 \cos^2 \vartheta = a^2 \sin^2 \vartheta$, daher für b^2 seinen Werth aus (1) substituirt,

$$(4x'y' - a^2) \cos^2 \vartheta = a^2 \sin^2 \vartheta;$$

$$4x'y' \cos^2 \vartheta = a^2 (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)$$
$$= a^2;$$

$$a = \pm\ 2\cos\vartheta\sqrt{x'y'},$$

und $$b = \pm\ 2\sin\vartheta\sqrt{x'y'},$$

daher ist die Größe der Queraxe und der conjugirten Axe gefunden.

Von den Kegelschnitten im Allgemeinen.

Erstes Kapitel.

Von der allgemeinen Gleichung der drei Kurven.

§. 260. Die Gleichung eines Kegelschnittes aus der allgemeinen Erklärung abzuleiten.

Verfährt man, wie in der Ellipse und Hyperbel (§. 89. und 172.), so kann gezeigt werden, daß die verlangte Gleichung ist

$$y^2 = 2m\,(1 + e)\,x - (1 - e^2)\,x^2.$$

Ist $e = 1$, so ist $y^2 = 4mx$, die Gleichung der Parabel

$e < 1$, $y^2 = 2m\,(1 + e)\,x - (1 - e^2)x^2$, die Gleichung der Ellipse,

und $e > 1$, $y^2 = 2m\,(1 + e)\,x + (e^2 - 1)\,x^2$, die Gleichung der Hyperbel.

§. 261. Es ist besonders bei jeder Kurve gezeigt worden, daß die Gleichung dieselbe Form behält, die Axen seien rechtwinklicht oder schief; daher, wenn irgend zwei

conjugirte Diameter die Coordinaten-Axen sind, so ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes

$$y^2 = mx + nx^2,$$

n = o in der Parabel, negativ in der Ellipse, und positiv in der Hyperbel.

Hieraus kann leicht gezeigt werden,

(1) daß die Tangente an einem gegebenen Punkte (x', y') ist

$$y - y' = \frac{m + 2nx'}{2y'}(x - x').$$

(2) Daß wenn $y = \alpha x + \beta$ die Gleichung irgend einer Sehne ist, die Gleichung für den halbirenden Diameter ist

$$y = \frac{n}{\alpha}x + \frac{m}{2\alpha},$$

und (3) daß, wenn $y = \alpha x + \beta$ die Gleichung eines Diameters ist,

$$y = \frac{n}{\alpha}x + \beta'$$

die Gleichung des zugehörigen conjugirten Diameters ist.

§. 262. Die Polar-Gleichung eines Kegelschnittes zu finden. (Fig. 84.)

Es sei EQ die Directrix, P irgend ein Punkt der Kurve, PM, PQ Senkrechte auf die Axe und Directrix.

Setze SP = r, AS = m, und Winkel ASP = ω.

Dann SP = e · PQ nach der Erklärung,

oder
$$r = e\left(\frac{m}{e} + x\right)$$
$$= e\left\{\frac{m}{e} + m - r\cos\omega\right\}$$
$$= m + em - er\cos\omega,$$

daher $r = \frac{m(1+e)}{1+e\cos\omega}$,

welches die verlangte Gleichung ist.

§. 263. Zusatz. Wenn $e = 1$, so ist $r = \frac{2m}{1+\cos\omega}$, welches die Gleichung der Parabel ist (64.).

Wenn $e <$ oder > 1, $r = \frac{m(1+e)}{1+e\cos\omega}$ welches die Gleichung für die Ellipse oder Hyperbel (115.) und (198.) ist.

§. 264. Aus den beiden Gleichungen

$$y^2 = mx + nx^2$$

und $r = \frac{m(1+e)}{1+e\cos\omega}$,

können die Eigenschaften eines Kegelschnittes im Allgemeinen, genau auf dieselbe Weise, auf welche aus der, einer jeden Kurve zugehörigen Gleichung dieselben besonders entwickelt wurden, abgeleitet werden.

Zweites Kapitel.

Von den Schnitten des Kegels.

§. 265. Erklärung. Es sei C ein fester Punkt über der Ebene einer gegebenen Kreisfläche BED, und BCZ eine unbegränzte gerade Linie, die immer durch C geht, während ihr Gränzpunkt B sich um die Kreislinie BED bewegt, so wird BCZ durch ihre Umdrehung einen Körper beschreiben, der ein Kegel heißt. (Fig. 85. a. b.)

Der Punkt C heißt der Scheitel, der Kreis BED die Grundfläche, und die Linie CO, welche den Scheitel mit dem Mitelpunkt der Grundfläche verbindet, die Axe des Kegels.

Der Kegel heißt ein gerader, oder ein schiefer, je nachdem die Axe senkrecht oder geneigt, zu der Ebene der Grundfläche ist.

Die Oberfläche eines Kegels ist aus zwei ähnlichen Theilen gebildet, der eine unterhalb, der andere oberhalb des Scheitels, jeder dieser Theile heißt eine entgegengesetzte Kegeloberfläche *).

Aus der Art, wie ein Kegel entsteht, ist klar, daß jeder Schnitt parallel mit der Grundfläche ein Kreis ist.

§. 266. Die Beschaffenheit der Kurve zu finden, die sich durch den Durchschnitt des geraden Kegels mit einer Ebene ergiebt. (Fig. 86.)

Es sei APp die durch den Durchschnitt eines geraden Kegels mit einer Ebene gebildete Kurve; durch die Axe CO lege eine Ebene BCD senkrecht zu der gegebenen Ebene, dann wird ihr Durchschnitt die gerade Linie Aa sein. In Aa nimm irgend einen beliebigen Punkt M, und durch diesen lege eine Ebene parallel zur Grundfläche, dann wird ihr Durchschnitt mit dem Kegel und der gegebenen Ebene beziehlich, der Kreis NPQ und die gerade Linie MP sein, welche, da sie senkrecht zu Aa und NQ ist, eine gemeinschaftliche Ordinate beider Kurven ist.

---

*) Entgegengesetzte Kegel-Oberfläche ist das für den Kegel, was ein Arm für eine Kurve ist.

Nimm Aa als die Axe der x, und AY senkrecht zu Aa, als die Axe der y; setze AM = x, MP = y; auch nimm AC = δ, Winkel BCD = α, und Winkel CAa = ϑ.

Dann ist $$\frac{Aa}{AC} = \frac{\sin ACa}{\sin AaC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)};$$

daher $$Aa = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)}\,\delta;$$

$$Ma = Aa - x = \frac{\delta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} - x \;\ldots\ldots\; (1).$$

Nun, den Eigenschaften des Kreises gemäß,

$$MP^2 = y^2 = NM \cdot MQ;$$

aber $$NM = MA \cdot \frac{\sin NAM}{\sin ANM} = x\,\frac{\sin CAa}{\cos NCM}$$

$$= \frac{x \sin \vartheta}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

und $$MQ = Ma\,\frac{\sin AaC}{\sin MQa} = Ma\,\frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin NQC}$$

$$= \left\{\frac{\delta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} - x\right\}\frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\cos \frac{\alpha}{2}};$$

daher durch Substitution

$$y^2 = \frac{x \cdot \sin \vartheta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left\{\frac{\delta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} - x\right\}$$

$$= \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left\{\delta \sin \alpha \cdot x - \sin(\alpha + \vartheta)\, x^2\right\},$$

welches (261.) die Gleichung eines Kegelschnittes ist.

§. 267. Wenn die schneidende Ebene parallel ist der erzeugenden Linie CD, so ist der Schnitt eine Parabel.

Wenn die schneidende Ebene parallel CD ist, so hat man in der obigen Gleichung

$\alpha + \vartheta = \pi$, deshalb $\sin(\alpha + \vartheta) = \sin \pi = 0$;

auch $\sin \vartheta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

deshalb wird die Gleichung

$$y^2 = \frac{\delta \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot x = \frac{4\,\delta \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\, x$$

$$= 4\,\delta \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot x,$$

welches die Gleichung einer Parabel ist, deren Parameter

$$= 4\,\delta \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

§. 268. Zusatz. Wenn die Ebene durch den Scheitel des Kegels geht, ist $\delta = 0$, und die Gleichung für den Schnitt wird $y^2 = 0$, welches die Gleichung der Linie CD ist.

§. 269. Wenn die schneidende Ebene nur die eine der entgegengesetzten Oberflächen des Kegels trifft, ist der Schnitt eine Ellipse. (Fig. 86.)

Es treffe die Ebene CB und CD, dann ist $\alpha + \vartheta < \pi$, und deshalb $\sin(\alpha + \vartheta)$ positiv; deshalb ist die Gleichung des Schnittes

$$y^2 = \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \cdot \frac{\alpha}{2}} \left\{ \delta \sin \alpha \cdot x - \sin (\alpha + \vartheta)\, x^2 \right\},$$

welches die Gleichung der Ellipse ist.

§. 270. Zusatz 1. Den Parameter und die Axen zu finden.

Vergleicht man die obige Gleichung mit

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ 2ax - x^2 \right\},$$

oder mit $\quad y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2,$

so hat man $\frac{2b^2}{a}$, oder der Parameter $= \frac{\delta \sin \alpha \cdot \sin \vartheta}{\cos^2 \cdot \frac{\alpha}{2}}$

$$= 2\delta \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \vartheta \; \ldots\ldots \; (1),$$

auch $\quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\alpha + \vartheta)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \; \ldots\ldots \; (2);$

deshalb, wenn b^2 eliminirt wird

$$a = \frac{\delta \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + \vartheta)};$$

und $\quad b^2 = \frac{a}{2} \cdot 2\delta \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \vartheta$

$$= \frac{\delta \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + \vartheta)} \cdot \delta \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \vartheta$$

$$= \delta^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha+\vartheta)};$$

daher $$b = \delta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha+\vartheta)}}.$$

§. 271. Zusatz 2. Wenn die Ebene durch den Scheitel geht, so ist $\delta = 0$, und die Gleichung wird

$$y^2 = -\frac{\sin(\alpha+\vartheta)\sin\vartheta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}x^2,$$

welches die Gleichung des Punktes C ist, da der Gleichung nun genügt werden kann, wenn man $x = 0$, $y = 0$ setzt.

§. 272. Wenn die schneidende Ebene beide entgegengesetzte Kegel-Oberflächen trifft, so ist der Schnitt eine Hyperbel.

In diesem Falle ist $\alpha + \vartheta > \pi$, deswegen $\sin(\alpha + \vartheta)$ negativ, die Gleichung des Schnittes ist

$$y^2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\cdot\frac{\alpha}{2}}\left\{\delta\sin\alpha\cdot x + \sin(\alpha+\vartheta)\,x^2\right\},$$

welches die Gleichung der Hyperbel ist.

Der Parameter und die Axen der Hyperbel können auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie in der Ellipse.

§. 273. Wenn die Ebene durch den Scheitel geht, so ist $\delta = 0$, und die Gleichung wird

$$y^2 = \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin(\alpha + \vartheta)\, x^2;$$

d. h. $$y = \pm \frac{\sqrt{\sin \vartheta \cdot \sin(\alpha + \vartheta)}}{\cos \cdot \frac{\alpha}{2}}\, x,$$

welches die Gleichungen für CB, CD sind; hiernach paßt in diesem Falle der Schnitt für die zwei erzeugenden Linien des Kegels.

Es ergiebt sich daher aus der vorstehenden Untersuchung, daß wenn ein gerader Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, der Schnitt ist

(1) eine Parabel, wenn die Ebene der erzeugenden Linie parallel ist.

(2) Eine Ellipse, wenn die Ebene bloß eine von den entgegengesetzten Oberflächen des Kegels schneidet.

(3) Eine Hyperbel, wenn die Ebene beide entgegengesetzte Kegel-Oberflächen schneidet.

§. 274. Die Beschaffenheit einer Kurve zu finden, welche sich durch den Schnitt eines schiefen Kegels mit einer Ebene ergiebt. (Fig. 87.)

Es sei APp die Kurve, die durch den Schnitt eines schiefen Kegels mit einer Ebene gebildet wird.

Die Construction ist wie vorher, nur daß die Linie MP nicht länger senkrecht ist zu Aa und NQ, sondern nur zu der letzteren; wir werden daher die Linien Aa und AY als schiefe Axen annehmen, die letztere parallel zu MP.

Hiernach, wie vorher, $Aa = \frac{\delta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)}$,

$$Ma = \frac{\delta \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} - x \ldots . (1)$$

auch $y^2 = NM \cdot MQ$;

$$NM = x \frac{\sin \vartheta}{\sin B},$$

und
$$MQ = Ma \cdot \frac{\sin (\alpha + \vartheta)}{\sin (\alpha + B)},$$

$$= \frac{\sin (\alpha + \vartheta)}{\sin (\alpha + B)} \left\{ \frac{\delta \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \vartheta)} - x \right\};$$

daher
$$y^2 = \frac{\sin \vartheta}{\sin B \cdot \sin (\alpha + B)} \left\{ \delta \cdot \sin \alpha \cdot x - \sin (\alpha + \vartheta)\, x^2 \right\},$$

welche, je nachdem die gegebene Ebene parallel zu CD ist, oder nur eine, oder beide Kegel-Oberflächen schneidet, die Gleichung der Parabel, Ellipse, oder Hyperbel, bezogen auf schiefe Axen ist.

§. 275. Zu finden, in welchen Fällen der Schnitt ein Kreis ist.

Bringt man obige Gleichung auf die Form

$$y^2 = \frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\alpha + \vartheta)}{\sin B \sin (\alpha + B)} \left\{ \frac{\delta \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} x - x^2 \right\},$$

so ist klar, daß der Schnitt ein Kreis ist, wenn der Coefficient

$$\frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\alpha + \vartheta)}{\sin B \cdot \sin (\alpha + B)} = 1,$$

oder $\sin \vartheta \cdot \sin (\alpha + \vartheta) = \sin B \cdot \sin (\alpha + B)$,

oder $\cos \alpha - \cos (\alpha + 2\vartheta) = \cos \alpha - \cos (\alpha + 2B)$,

d. h. $\cos(\alpha+2\vartheta) = \cos(\alpha+2B)$,

d. h. $\alpha+2\vartheta = \alpha + 2B \ldots (1)$

oder $ = 2\pi - (\alpha+2B) \ldots (2)$.

Erstens, wenn $\alpha + 2\vartheta = \alpha + 2B$

$$\vartheta = B,$$

d. h. wenn die Ebene parallel mit der Grundfläche ist, so ist der Schnitt ein Kreis.

Zweitens, wenn $\alpha + 2\vartheta = 2\pi - (\alpha + 2B)$,

dann $2\alpha + 2\vartheta + 2B = 2\pi$,

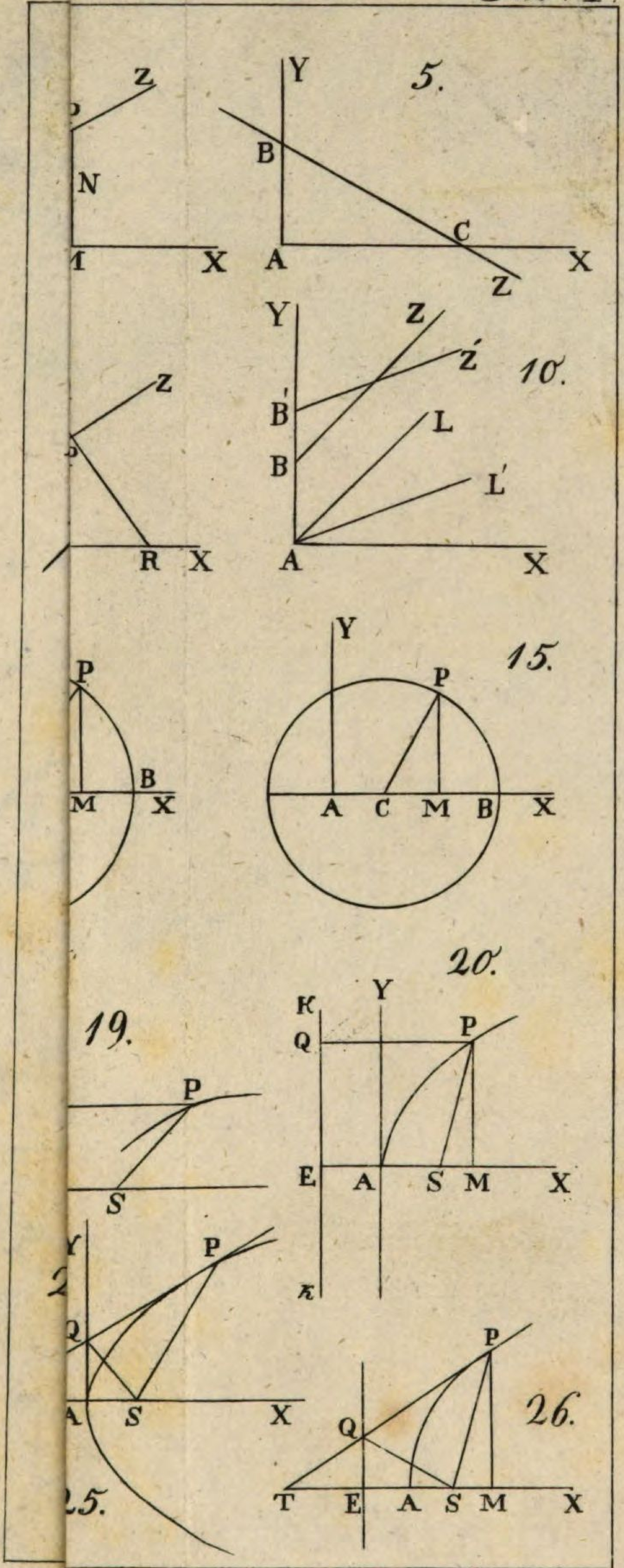
oder $\alpha + \vartheta + B = \pi = \alpha + D + B$;

d. h. $\vartheta = D$;

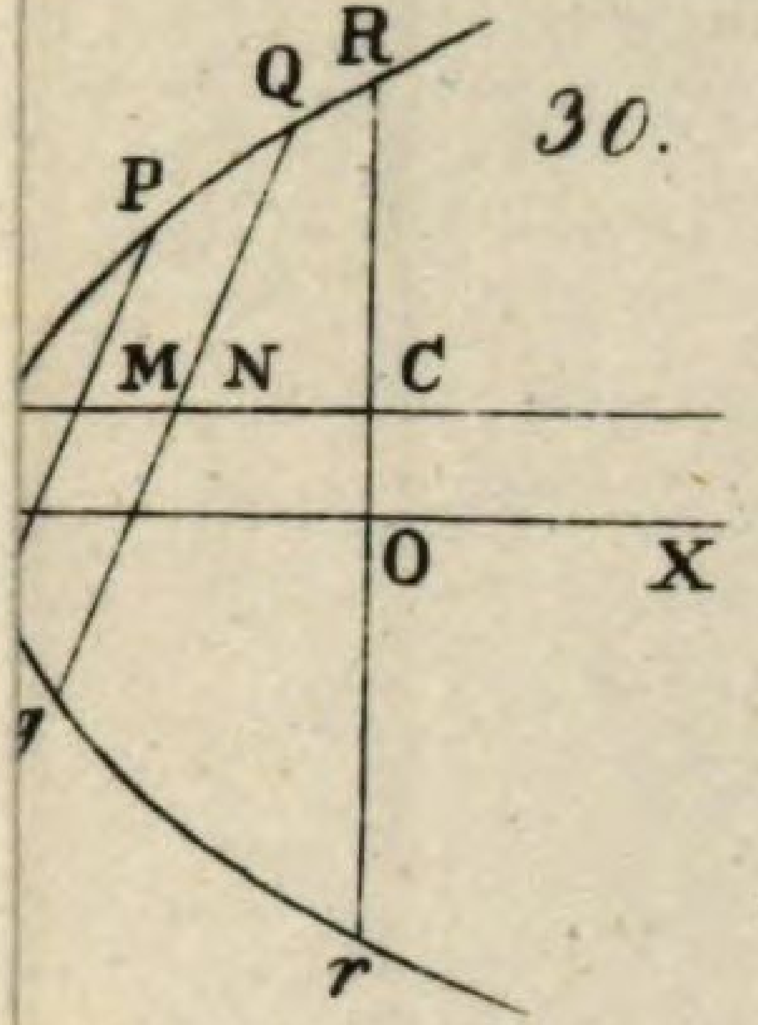
hiernach also, wenn der Winkel CAX = CDB, so ist der Schnitt auch ein Kreis. Dieser heißt der subcontraire (antiparallele) Schnitt des Kegels.

Gedruckt bei Ferdinand Nietack.

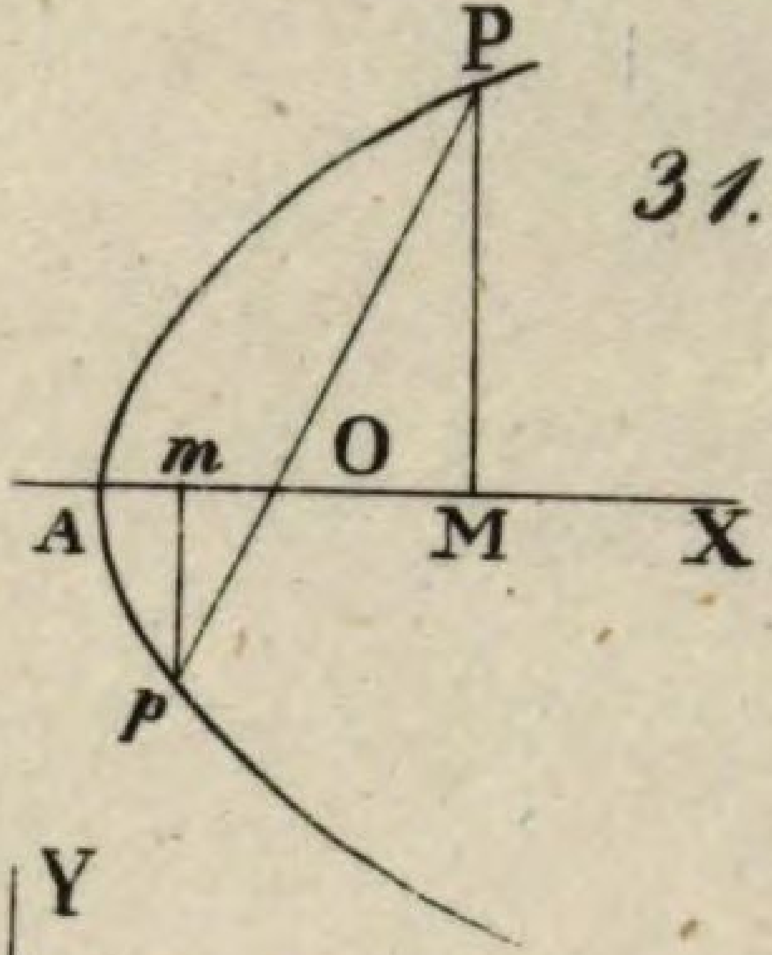
Tab. I.



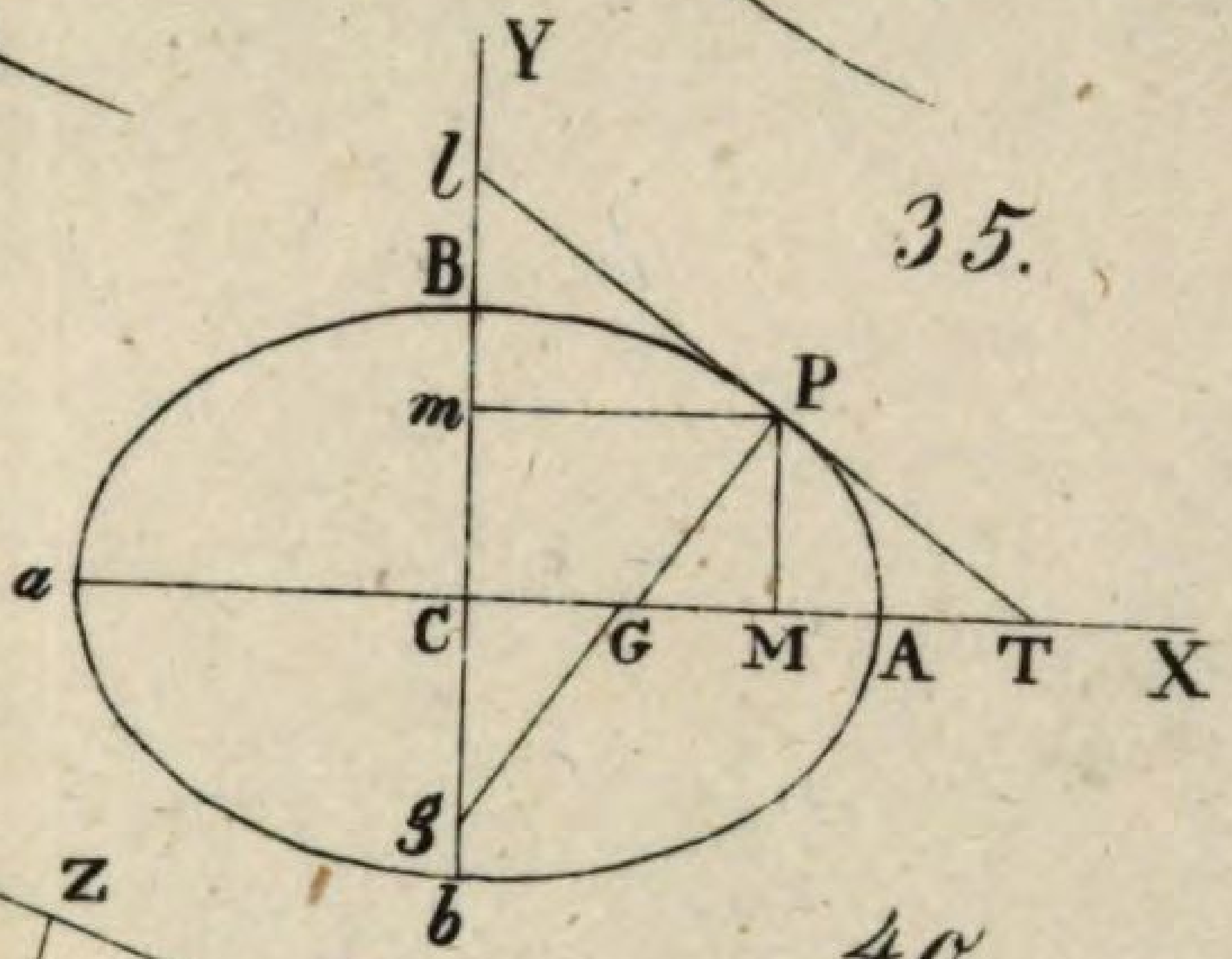
5.
Y
B
C
A
X
Z
N
X
10.
Z
Z′
B′
B
L
L′
A
X
R
X
15.
Y
P
A
C
M
B
X
P
B
M
X
20.
K
Y
Q
P
E
A
S
M
X
19.
P
S
Y
P
Q
A
S
X
26.
P
Q
T
E
A
S
M
X
25.



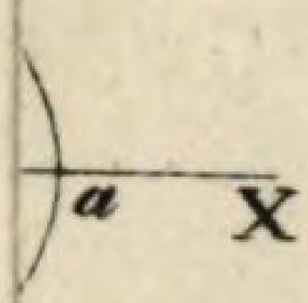
30.

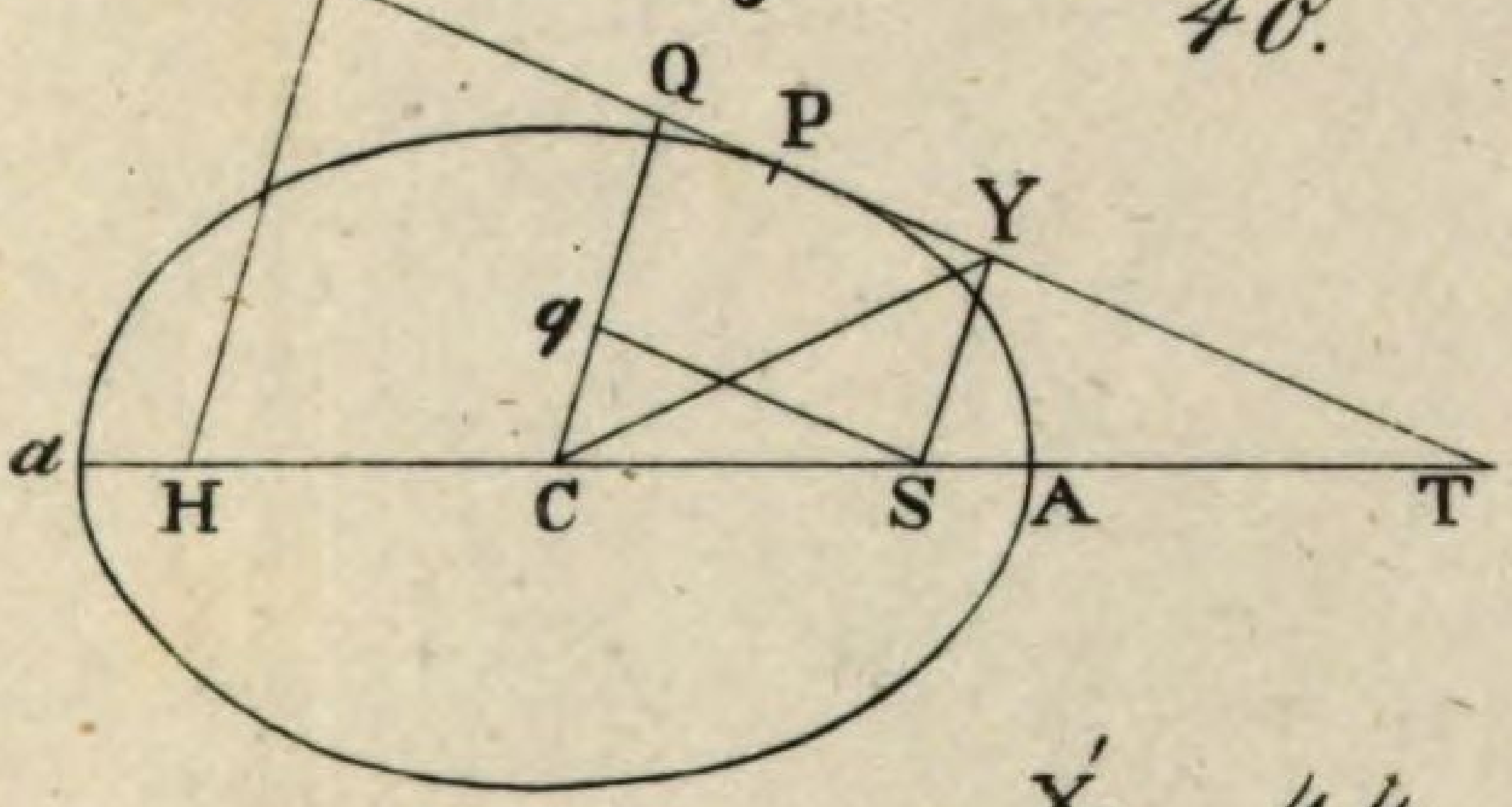


31.

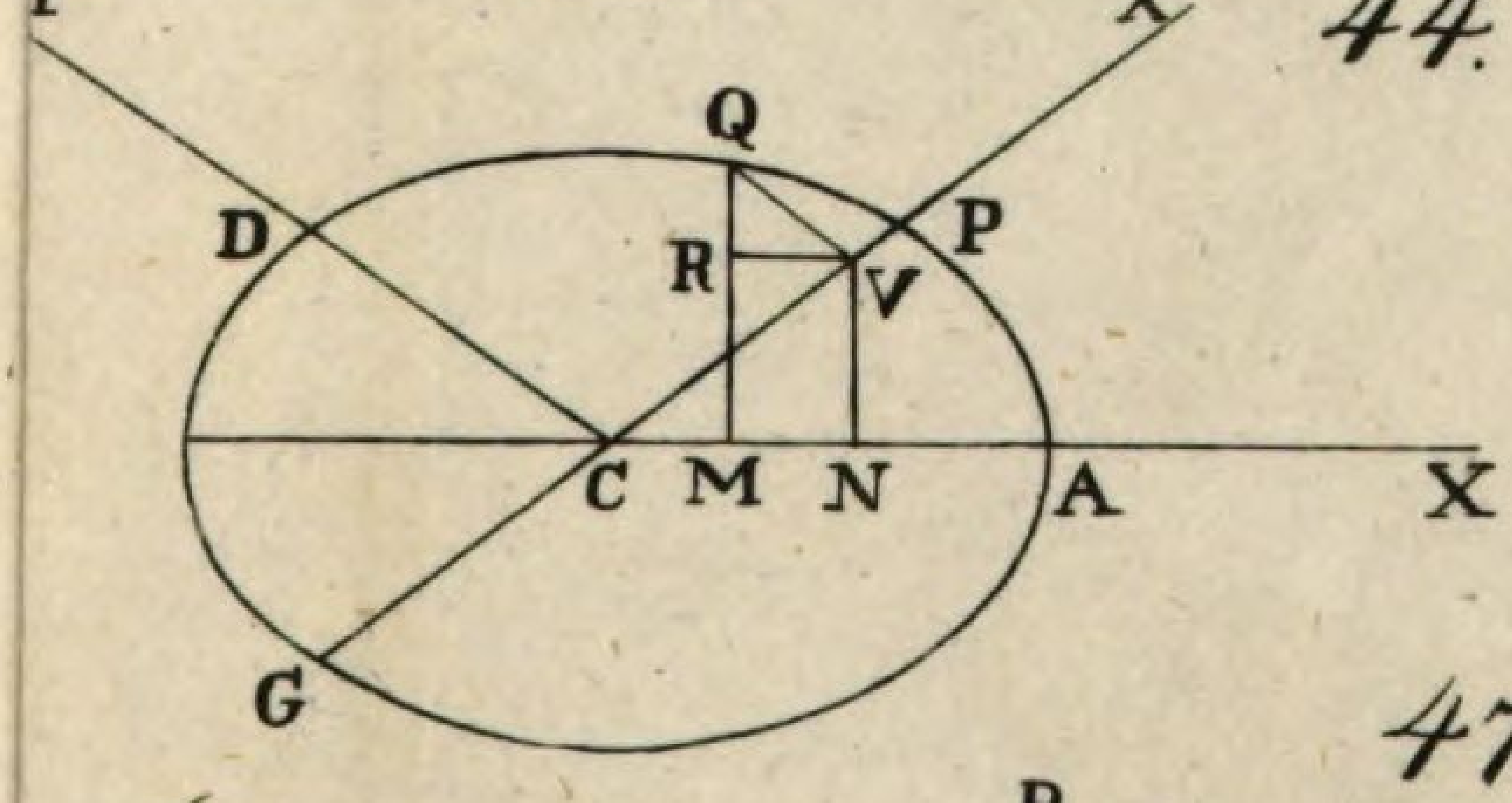


35.

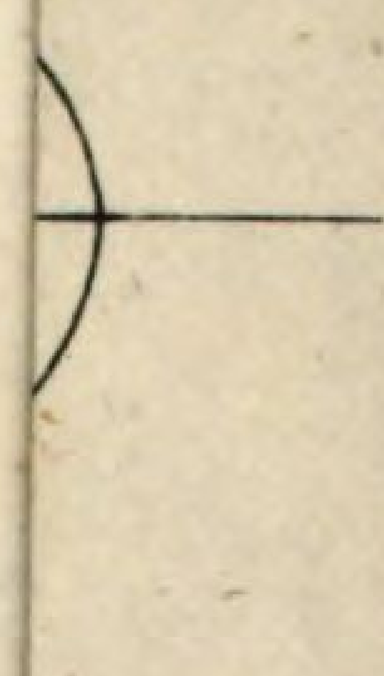


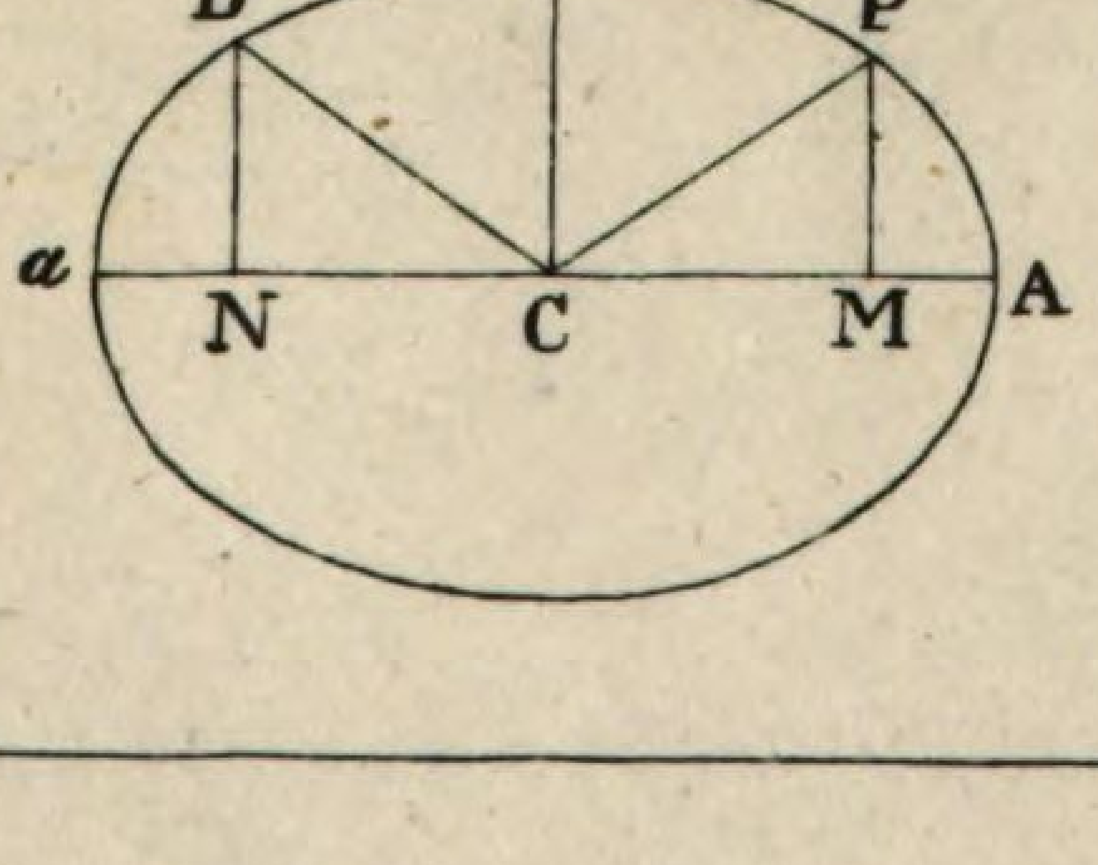


40.



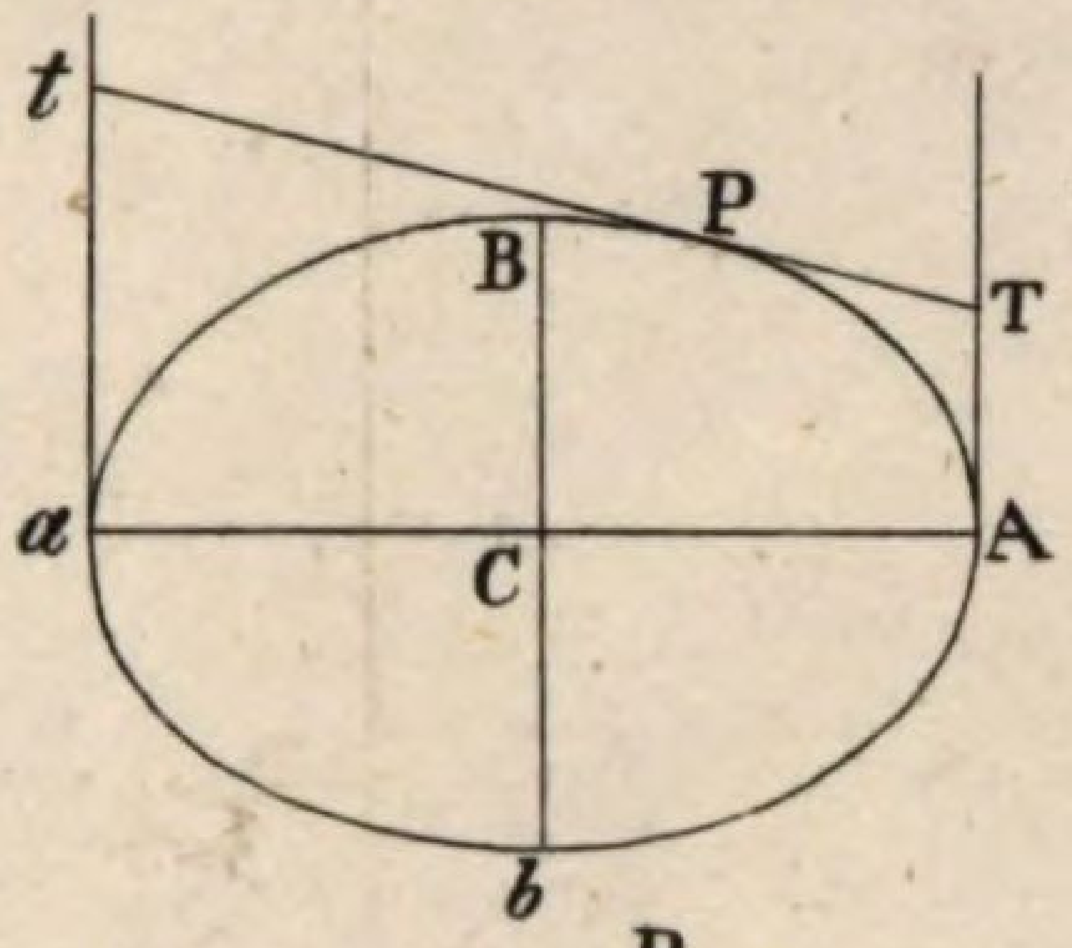
44.



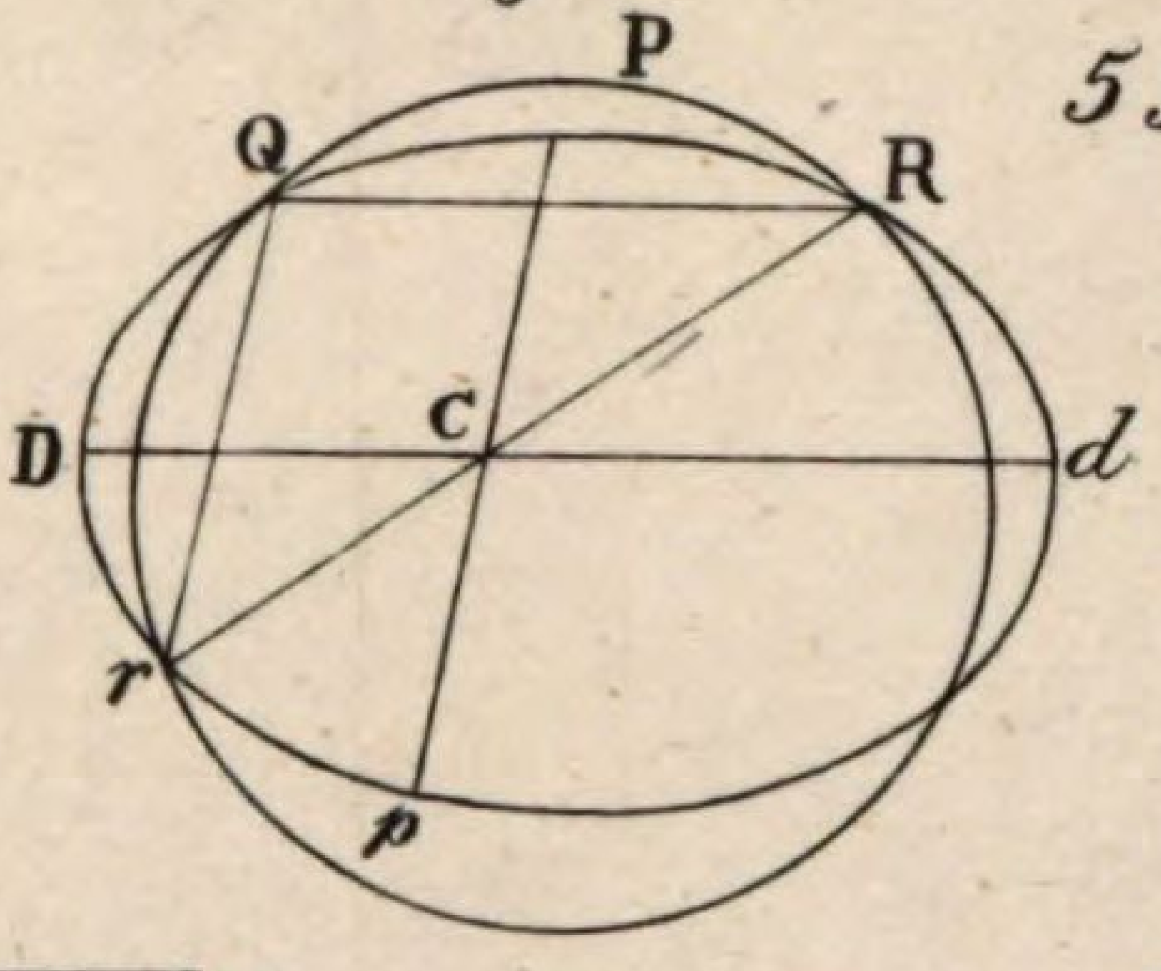


47.

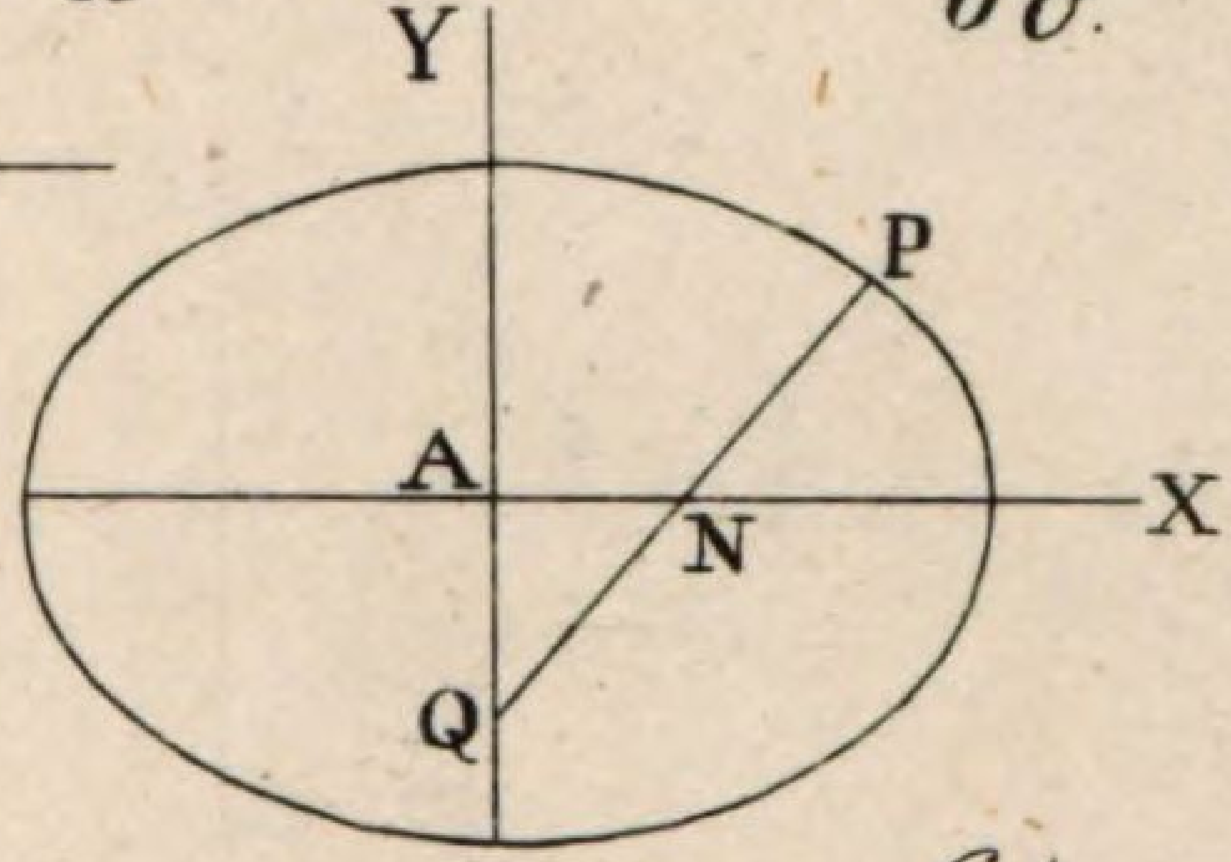
51.



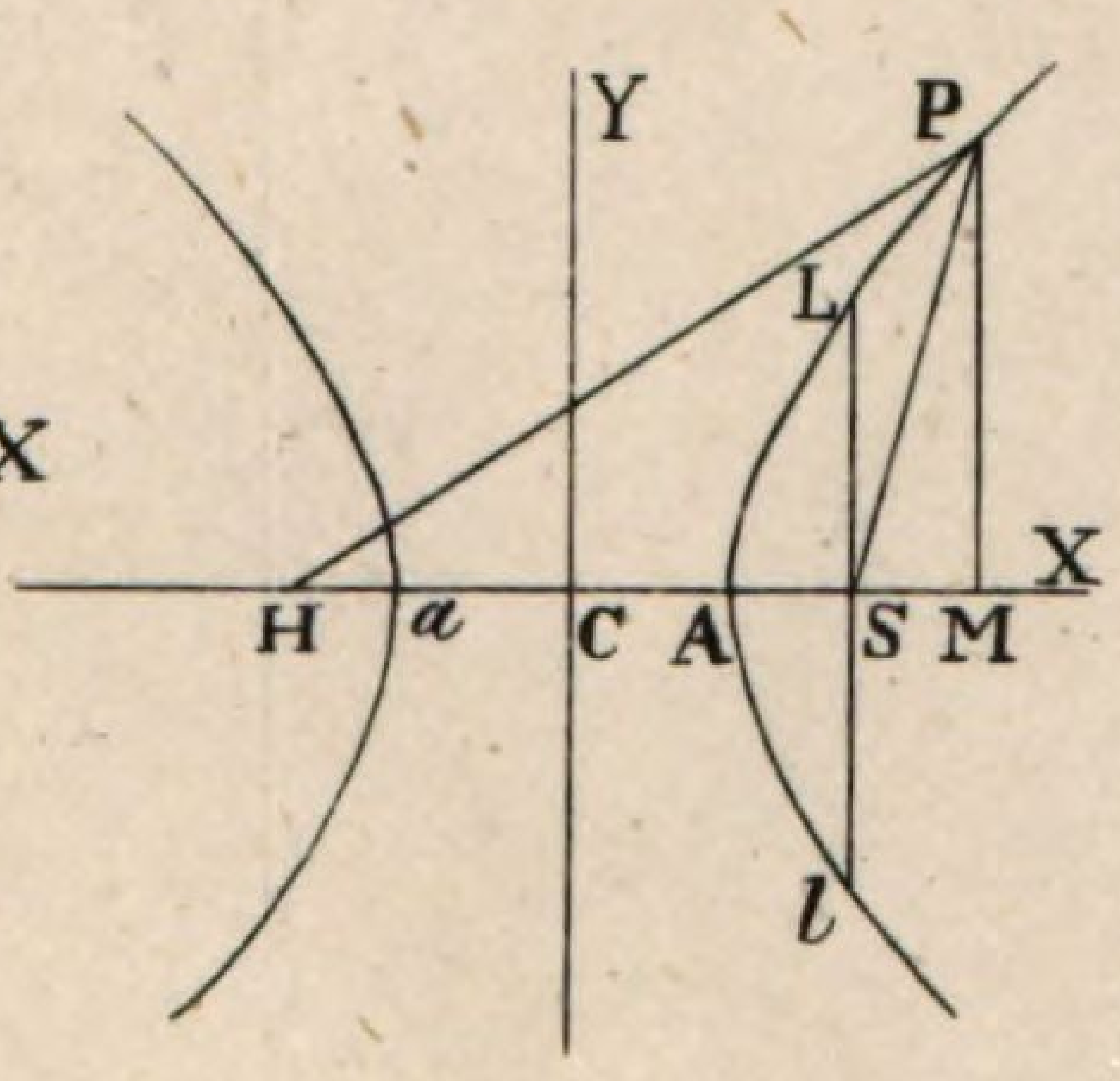
55.

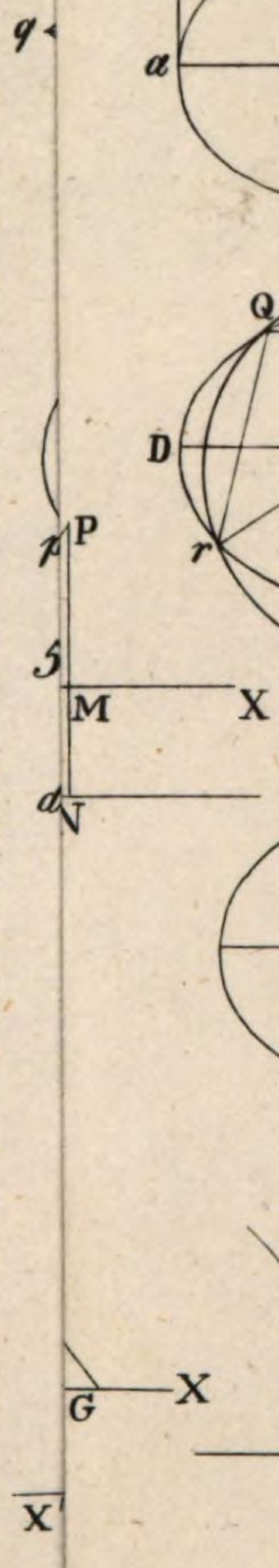


60.

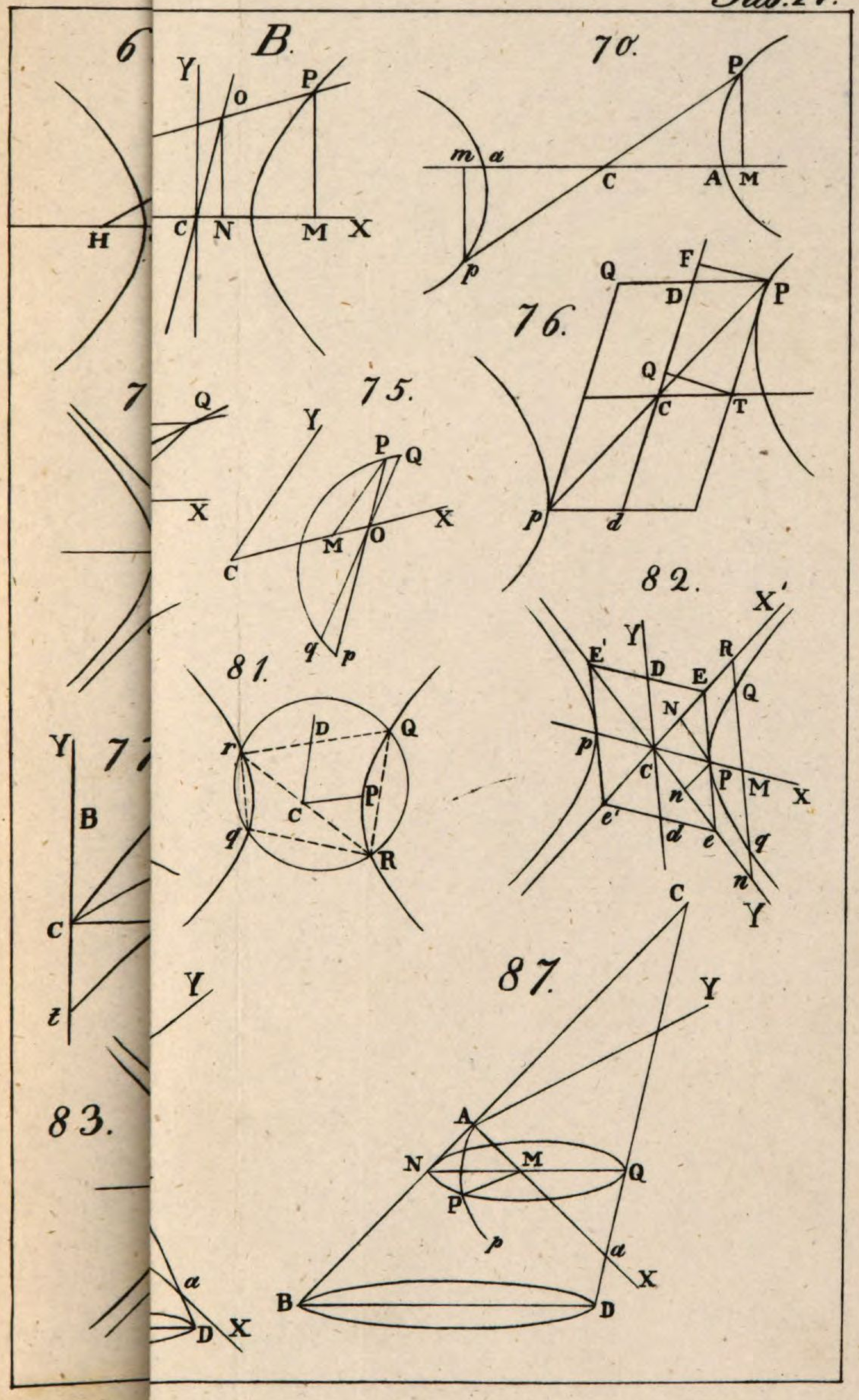


64.

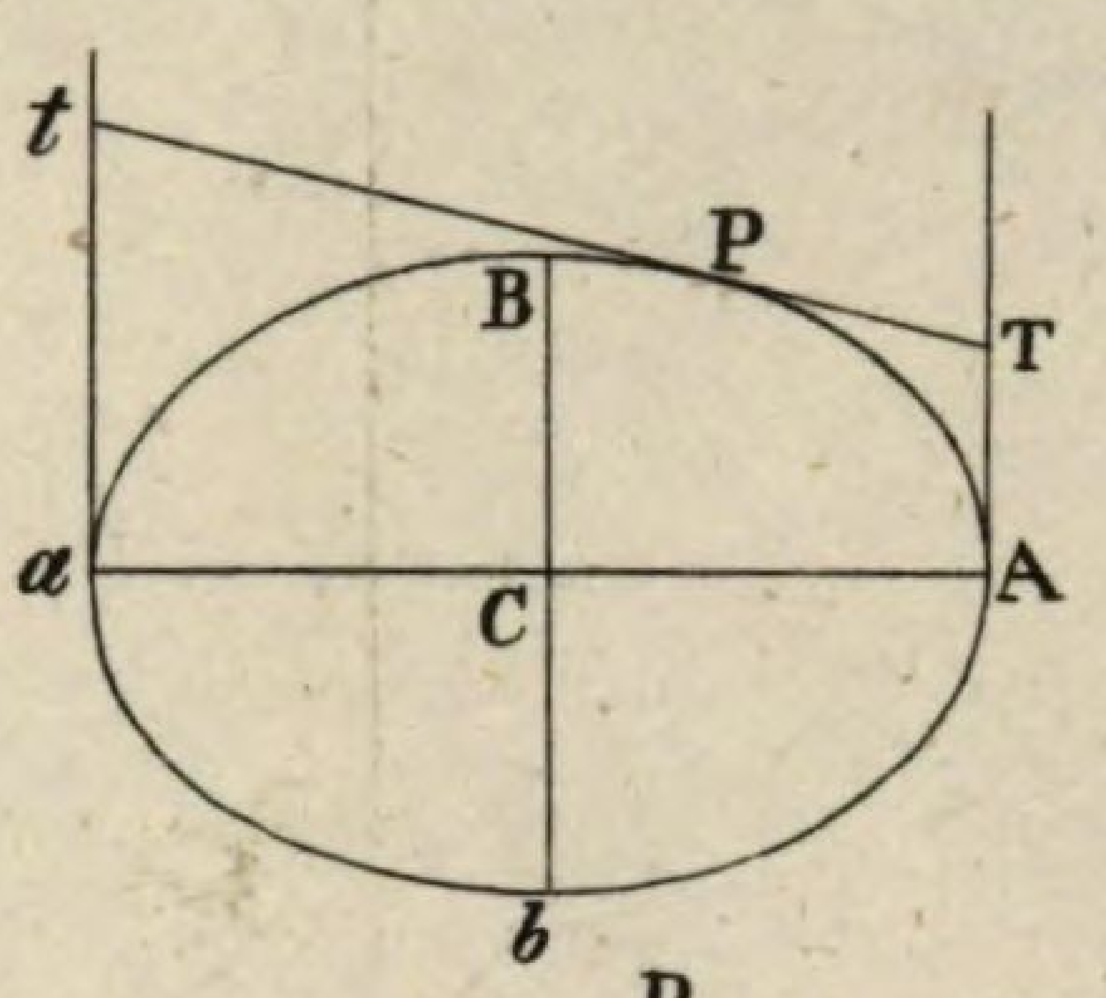




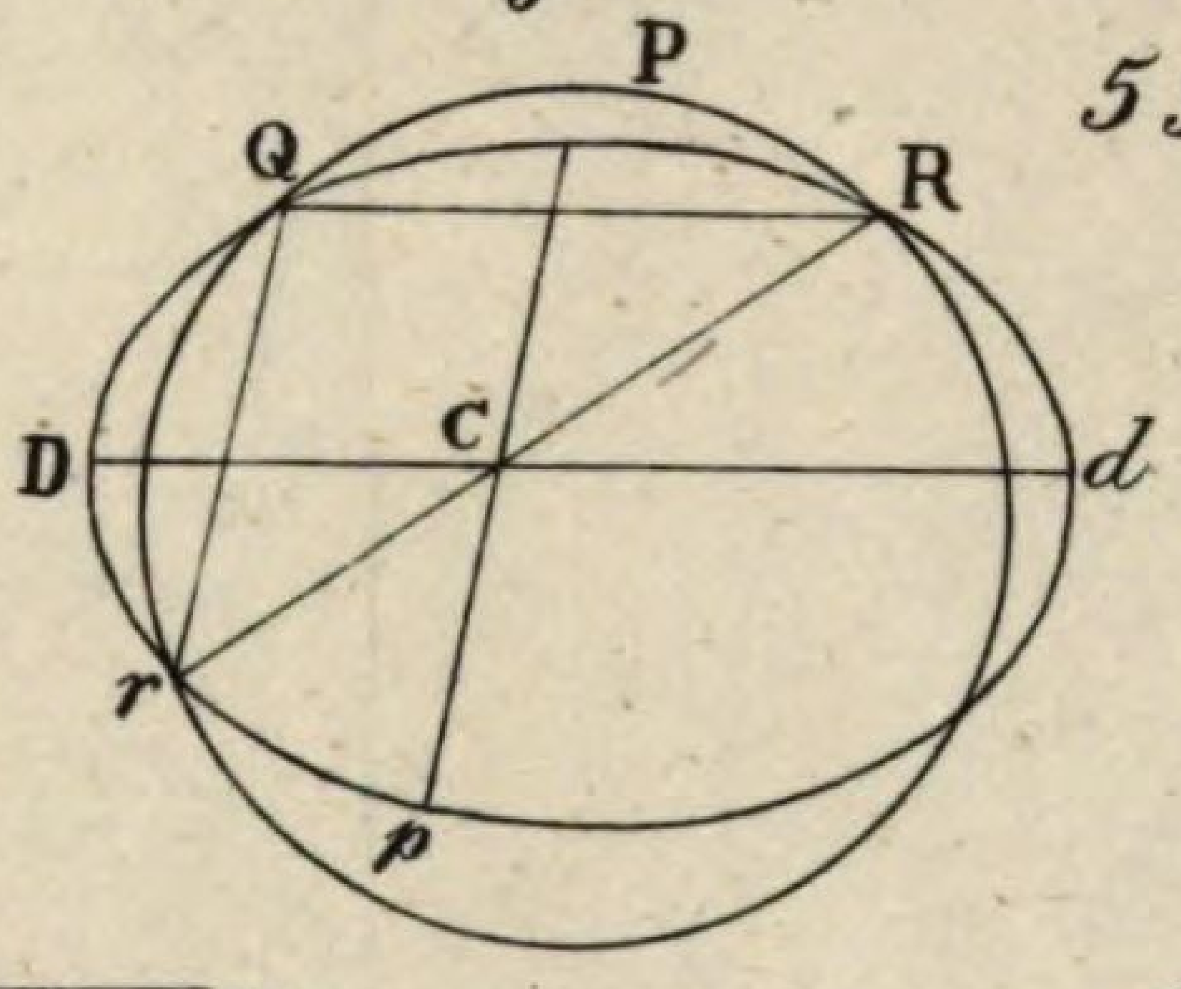
Zu Hami… Tab. IV.



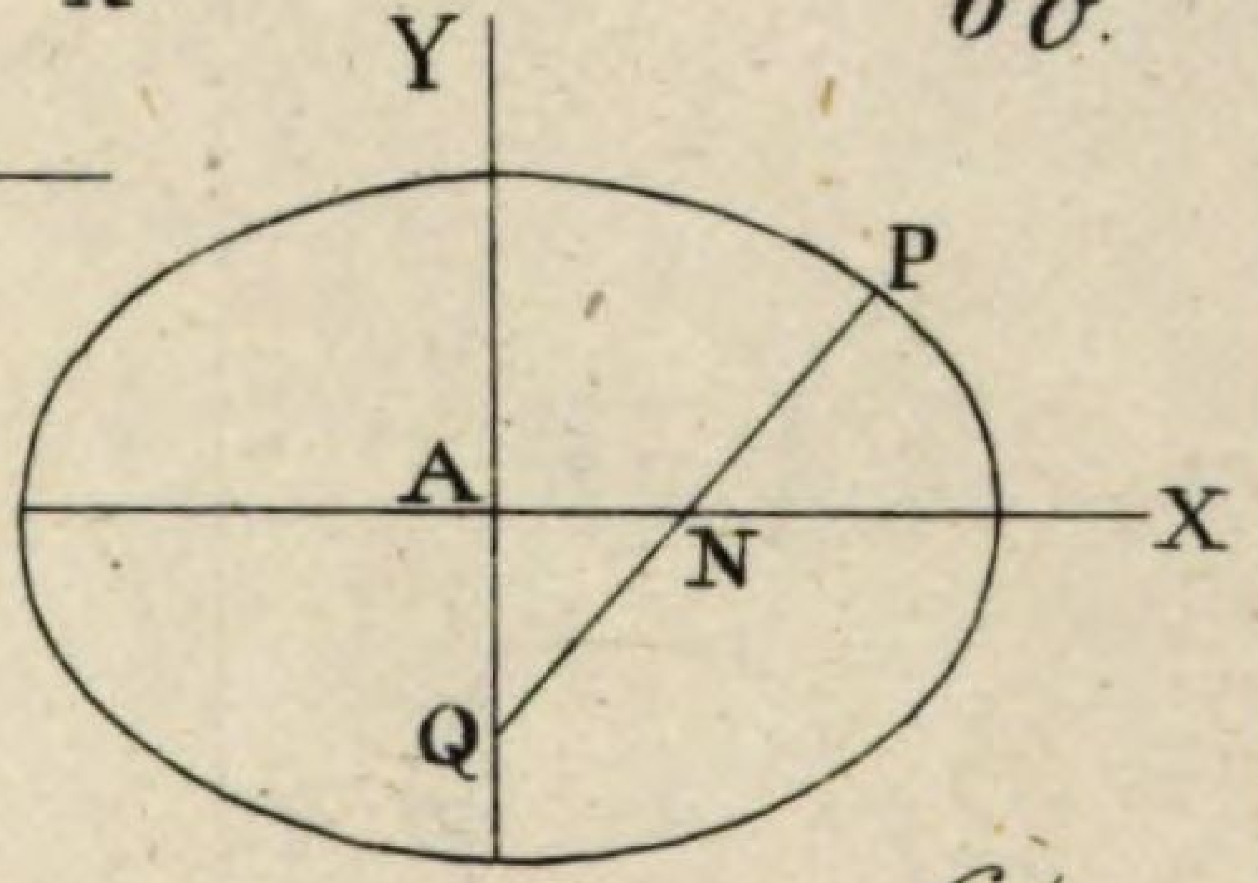
51.



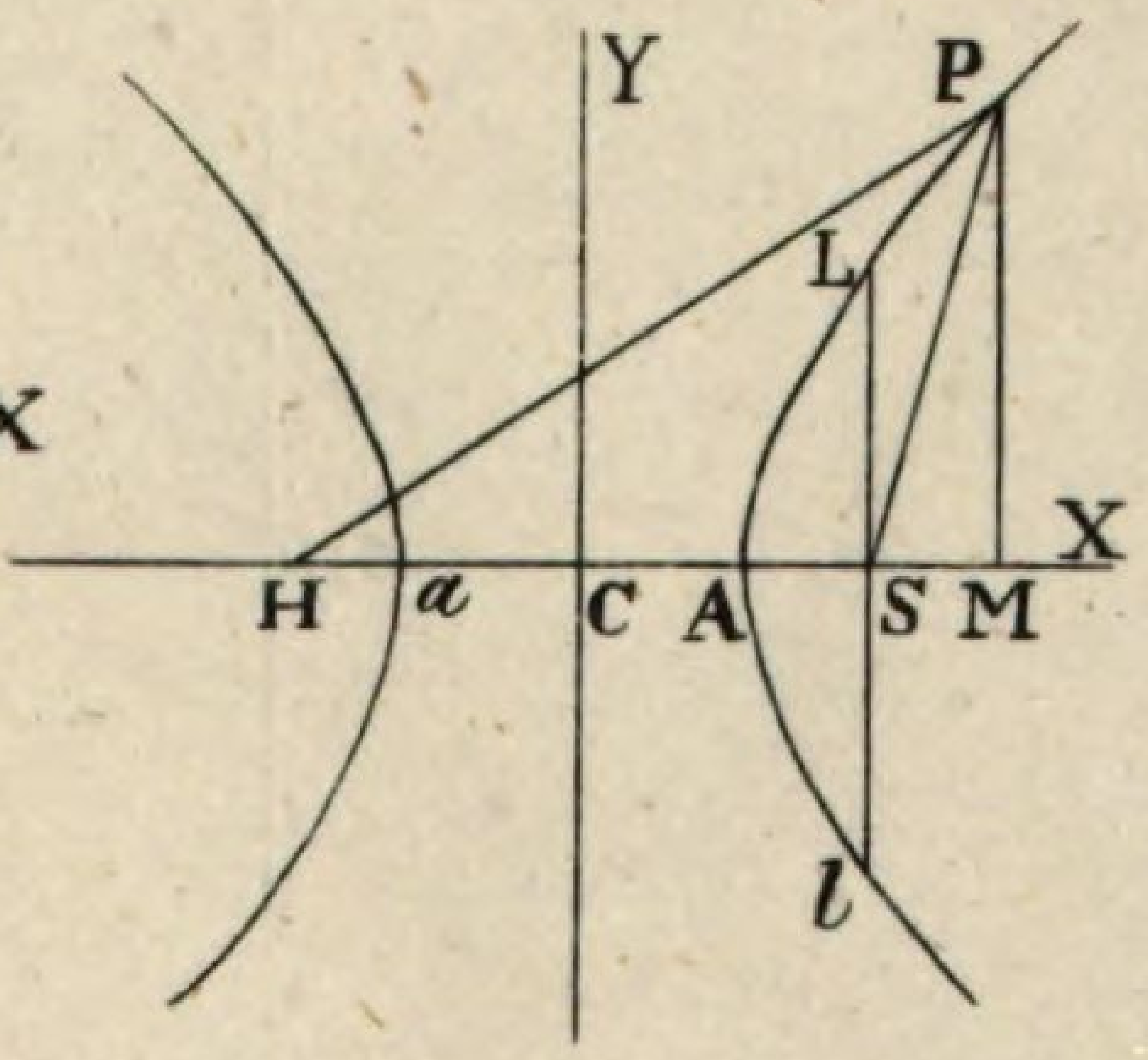
55.

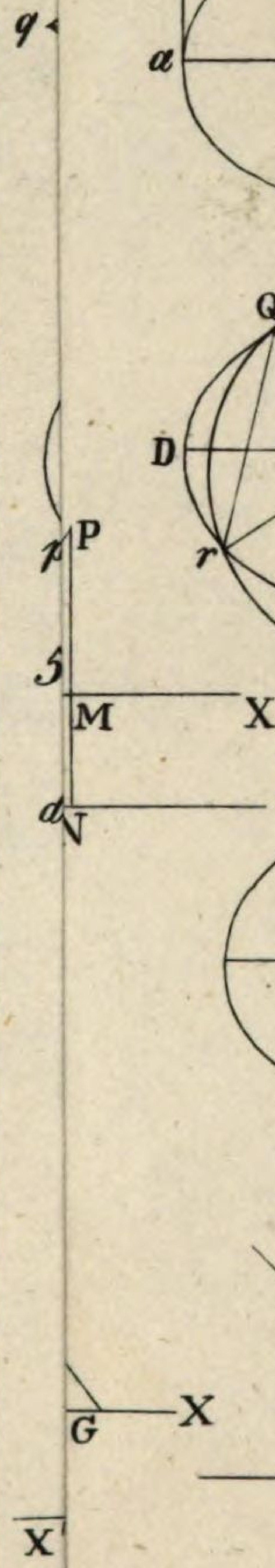


60.



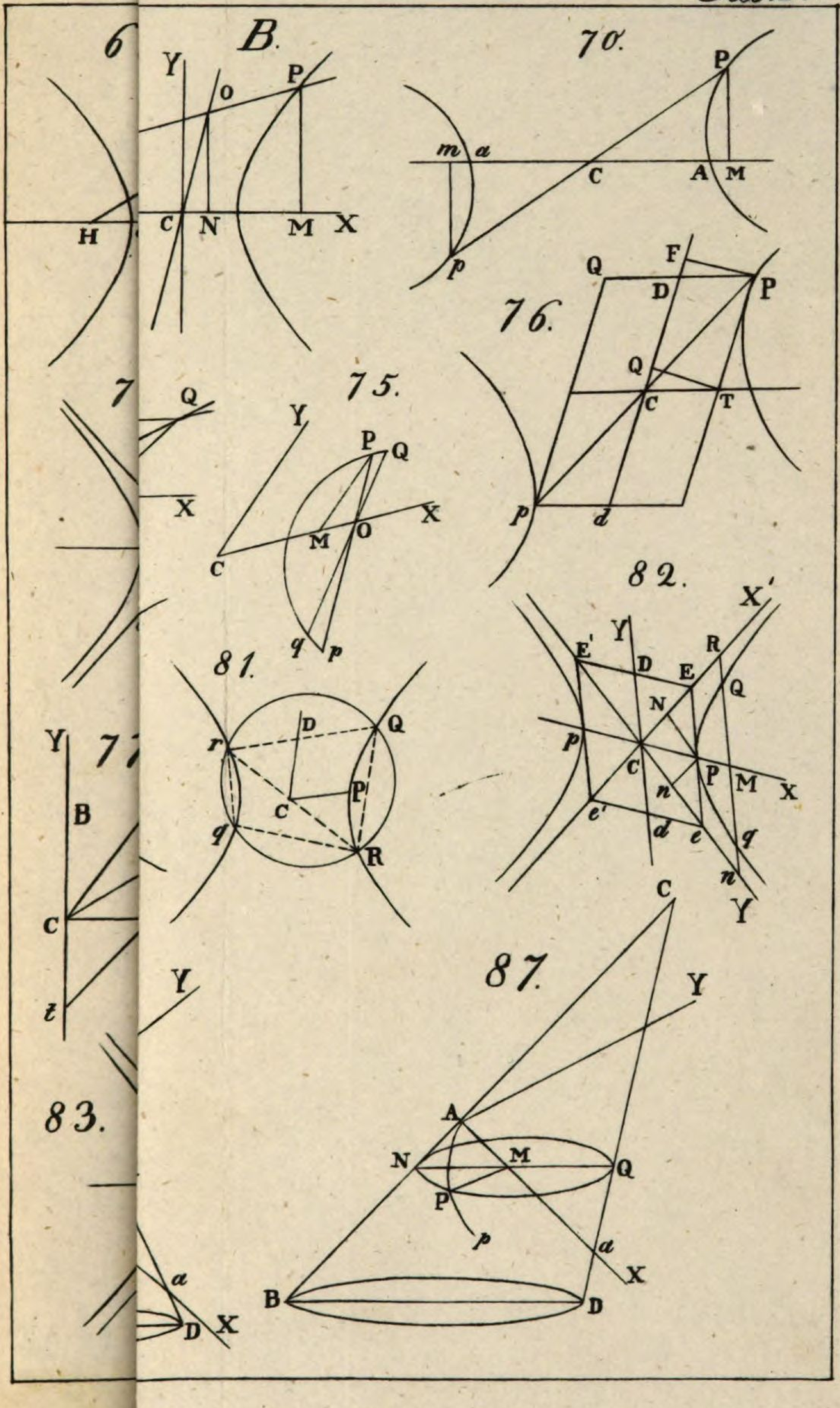
64.





Zu Hami

Tab. IV.



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hamilton, Henry P.

System der Kegelschnitte analytisch dargestellt Mit 4 Figurentafeln

Berlin 1828

Math.p. 201 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081918-5